Universidade Federal do Ceará	Campus de Quixadá
Matemática Discreta	
1° Avaliação Parcial	Data 07/10/2016
Nome:	

1. (1.0) Identifique o erro na prova do teorema abaixo.

   Teorema: A soma de quaisquer dois inteiros pares é igual a $4k$ para algum inteiro k.

   Prova Suponha que m e n são dois inteiros pares quaisquer. Pela definição de par, para algum inteiro k, $m = 2k$ e $n = 2k$. Substituindo, $m + n = 2k + 2k = 4k$, para algum inteiro k, o que devia ser provado.

   O erro na prova é assumir que os dois inteiros pares são os mesmos.

2. (1.0) Sua missão é preencher as lacunas e os espaços em branco, não omitindo nenhum detalhe.

   Teorema: Seja n um inteiro. Prove que se n^2 é divisível por 3, então n é divisível por 3.

   Prova A prova segue pela (insira o nome da técnica de prova aqui). Suponha que n não é divisível por 3. A prova segue (insira o nome da técnica de prova aqui). Vamos considerar os dois casos separadamente:

   - Caso 1 (Insira os passos que estão faltando aqui)
   - Caso 2 (Insira os passos que estão faltando aqui)

   Nos dois casos considerados, n^2 não é divisível por 3. Podemos concluir que se n^2 é divisível por 3 então n é divisível por 3.

   A prova segue pela contrapositiva. Suponha que n não é divisível por 3. A prova segue por casos. Vamos considerar os dois casos separadamente:

   - Caso 1: $n = 3k+1$. Então, $n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2+6k+1 = 3(3k^2+2k)+1$. Logo, n^2 não é divisível por 3.
   - Caso 2: $n = 3k+2$. Então, $n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2+12k+4 = 3(3k^2+4k+1)+1$. Logo, n^2 não é divisível por 3.

   Nos dois casos considerados, n^2 não é divisível por 3. Podemos concluir que se n^2 é divisível por 3 então n é divisível por 3.

3. (2.0) Prove que os seguintes proposições são equivalentes:

   (1) $n - 5$ é ímpar.

   (2) $3n + 2$ é par.

   (3) $n^2 - 1$ é ímpar.

   Dica: Prove os seguintes implicações:

   (a) (1) → (2)

   (b) (2) → (1)

   (c) (1) → (3)

   (d) (3) → (1)

   (1) → (2). Suponha que $n - 5$ é ímpar, ou seja, existe um inteiro k tal que $n - 5 = 2k + 1 \Leftrightarrow n = 2k + 6$. Então,

   $$3n + 2 = 3(2k + 6) + 2 = 6k + 18 + 2 = 6k + 20 = 2(3k + 10). \tag{1}$$

   Logo, $3n + 2$ é par.

   (2) → (1). Suponha, pela contrapositiva, que $n - 5$ é par, ou seja, existe um inteiro k tal que $n - 5 = 2k \Leftrightarrow n = 2k + 5$. Então,

   $$3n + 2 = 3(2k + 5) + 2 = 6k + 15 + 2 = 6k + 17 = 2(3k + 8) + 1. \tag{2}$$

   Logo, $3n + 2$ é ímpar.

   (1) → (3). Suponha que $n - 5$ é ímpar, ou seja, existe um inteiro k tal que $n - 5 = 2k + 1 \Leftrightarrow n = 2k + 6$. Então,

   $$n^2 - 1 = (2k + 6)^2 - 1 = 4k^2 + 24k + 36 - 1 = 4k^2 + 24k + 35 = 2(2k^2 + 12k + 17) + 1. \tag{3}$$

Logo, $n^2 - 1$ é ímpar.

(3) $\rightarrow$ (1). Suponha, pela contrapositiva, que $n-5$ é par, ou seja, existe um inteiro k tal que $n - 5 = 2k \Leftrightarrow n = 2k+5$. Então,

$$n^2 - 1 = (2k+5)^2 - 1 = 4k^2 + 20k + 25 - 1 = 4k^2 + 20k + 24 = 2(^2k^2 + 10k + 12) \tag{4}$$

Logo, $n^2 - 1$ é par.

4. (2.0) Considere as dois teoremas sobre os números reais x e y

   Teorema 1 : Se o produto , xy, não é racional, então x ou y devem ser irracionais.

   Teorema 2: Se x é racional e y é irracional então $x + y$ é irracional.

   (a) (1.0) Prove o Teorema 1. Suponha, pela contrapositiva, que x e y são racionais, ou seja, existem inteiros a, b, c, d com $b \neq 0$ e $d \neq 0$ tal que $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$. Então,

   $$xy = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \tag{5}$$

   Concluímos que xy é racional já que $ac \in \mathbb{Z}$, $bd \in \mathbb{Z}$ e $bd \neq 0$.

   (b) (1.0) Prove o Teorema 2.
   Suponha, por contradição, que x é racional, y é irracional e $x+y$ é racional, ou seja, existem inteiros a, b, c, d com $b \neq 0$ e $d \neq 0$ tal que $x = \frac{a}{b}$ e $x + y = \frac{c}{d}$. Então

   $$x + y = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + y = \frac{c}{d} \Leftrightarrow y = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{cb - ad}{bd} \tag{6}$$

   Logo, y é irracional e racional. Absurdo.

5. (2.0) Dado $a, b, c \in \mathbb{Z}$:

   (a) (1.0) Mostre que se $a|b$ e $a|(b+c)$ então $a|c$.
   Como $a|b$ e $a|(b+c)$, existem inteiros s e t tal que $b = as$ e $b + c = at$. Então,

   $$b + c = at \Leftrightarrow c = at - b = at - as = a(t-s) \tag{7}$$

   Logo, $a|c$

   (b) (1.0) Mostre que se $a^3|b$ e $b^3|c$ então $a^9|c$.
   Como $a^3|b$ e $b^3|c$, existem inteiros s e t tal que $b = a^3s$ e $c = b^3t$. Então,

   $$c = b^3t = (a^3s)^3t = a^9s^3t \tag{8}$$

   Logo, $a^9|c$.

6. (1.0) Seja $n \in \mathbb{Z}$. Mostre que se $n \equiv 4 \ (mod\ 6)$ então $n^2 \equiv 1 (mod\ 3)$

   Como $n \equiv 4 \ (mod\ 6)$, existe um inteiro k tal que $n = 6k + 4$. Então,

   $$n^2 = (6k+4)^2 = 36k^2 + 48k + 16 = 3(12k^2 + 16k + 5) + 1 \tag{9}$$

   Logo, $n^2 \equiv 1 (mod\ 3)$

7. (1.0) Prove se a seguinte proposição é verdadeira, ou dê um contra-exemplo que mostre que ela é falsa.

   Seja $a, b \in \mathbb{Z}$ e m um inteiro positivo. Se $a^n \equiv b^n \ (mod\ m)$ então $a \equiv b \ (mod\ m)$

   Considere $a = 4, b = 2, m = 4$ e $n = 2$, temos que $a^n \equiv b^n \ (mod\ m)$ e $a \not\equiv b \ (mod\ m)$

8. (1.0) Descubra o seu filme predileto:

   Siga as instruções:

   - Escolha um número de 1 a 9;
   - Multiplique por 3;
   - Some 3;
   - Multiplique outra vez por 3;
   - Some os dois algarismos;

   Opções:

(1) Um sonho de liberdade
(2) Poderoso Chefão
(3) Poderoso Chefão II
(4) Batman: O cavaleiro das Trevas
(5) 12 Homens e uma sentença
(6) A lista de Schindler
(7) Pulp Fiction
(8) O Senhor dos Anéis: O Retorno do Rei
(9) Shaolin do Sertão
(10) Três Homens em Conflito
(11) Clube da Luta
(12) O Senhor dos Anéis: A Sociedade do Anel
(13) O Império Contra-Ataca
(14) Forrest Gump
(15) A origem
(16) O Senhor do Anéis: As duas Torres
(17) Os Bons Companheiros

Mostre que, independente da escolha inicial, todas as pessoas terão o mesmo filme predileto.

Siga as instruções:

- Escolha um número de 1 a 9; (x)
- Multiplique por 3; (3x)
- Some 3; (3x+3)
- Multiplique outra vez por 3; [3(3x+3) = 9x+9]

Logo, o resultado final das instruções (9x+9) é um múltiplo de 9. Sabemos que a soma dos dígitos de um número múltiplo de 9, também é múltiplo de 9. Dentre as opções, a única opção que é múltiplo de 9 é o filme Shaolin do Sertão.