Universidade Federal do Ceará	Campus de Quixadá
Matemática Discreta	
1° Avaliação Parcial	Data 07/10/2016
Nome:	

1. (1.0) Se nós estamos provando uma implicação $p \to q$, nós assumimos

   (a) p para uma prova direta
   (b) ______________ para uma prova pela contrapositiva
   (c) ______________ para uma prova por contradição.

   Depois da suposição inicial, nós provamos $p \to q$ mostrando que

   (a) q segue das hipóteses pela prova direta.
   (b) ____________________ segue das hipóteses pela prova pela contrapositiva.
   (c) ____________________ segue das hipóteses pela prova por contradição.

   Se nós estamos provando uma implicação $p \to q$, nós assumimos
   Se nós estamos provando uma implicação $p \to q$, nós assumimos

   (a) p para uma prova direta
   (b) $\neg q$ para uma prova pela contrapositiva
   (c) $p \wedge \neg q$ para uma prova por contradição.

   Depois da suposição inicial, nós provamos $p \to q$ mostrando que

   (a) q segue das hipóteses pela prova direta.
   (b) $\neg p$ segue das hipóteses pela prova pela contrapositiva.
   (c) uma contradição segue das hipóteses pela prova por contradição.

   Se nós estamos provando uma implicação $p \to q$, nós assumimos

2. (1.0) Sua missão é preencher as lacunas e os espaços em branco, não omitindo nenhum detalhe.
   Teorema: Se $a \not\equiv b\ (mod\ 6)$ então $a \not\equiv b\ (mod\ 2)$ ou $a \not\equiv b\ (mod\ 3)$

   Prova A prova segue pela (insira o nome da técnica aqui). Suponha que $a \equiv b\ (mod\ 2)$ e $a \equiv b\ (mod\ 3)$. Como $a \equiv b\ (mod\ 2)$, temos que $2|a-b$, então existe um inteiro k tal que $a-b = 2k$. Logo, $a-b$ é par. Como $a \equiv b\ (mod\ 3)$, (insira alguns passos aqui). Portanto, a-b = 3l. Como $3l$ é par e 3 é ímpar, concluímos que (insira algum passo aqui). Logo,

   $$a - b = 3l = 3(\_\_\_\_) = 6k \tag{1}$$

   Temos que $6|a-b$, então (insira aqui a conclusão final).

   Prova A prova segue pela contrapositiva. Suponha que $a \equiv b\ (mod\ 2)$ e $a \equiv b\ (mod\ 3)$. Como $a \equiv b\ (mod\ 2)$, temos que $2|a-b$, então existe um inteiro k tal que $a-b=2k$. Logo, $a-b$ é par. Como $a \equiv b\ (mod\ 3)$, temos que $3|a-b$, então existe um inteiro k tal que $a-b=3k$. Portanto, $a-b=3l$. Como $3l$ é par e 3 é ímpar, concluímos que l é par. Logo,

   $$a - b = 3l = 3(2m) = 6m \tag{2}$$

   Temos que $6|a-b$, então $a \equiv b\ (mod\ 6)$.

3. (2.0) Prove que os seguintes proposições são equivalentes:

   (1) $n-4$ é par.
   (2) $3n+3$ é ímpar.
   (3) n^2+1 é ímpar.

   Dica: Prove os seguintes implicações:

(a) (1) $\to$ (2)
(b) (2) $\to$ (1)
(c) (1) $\to$ (3)
(d) (3) $\to$ (1)

(1) $\to$ (2). Suponha que $n-4$ é par, ou seja, existe um inteiro k tal que $n-4=2k \Leftrightarrow n=2k+4$. Então,

$$3n+3=3(2k+4)+3=6k+12+3=6k+15=2(3k+7)+1 \tag{3}$$

Logo, $3n+3$ é ímpar.

(2) $\to$ (1). Suponha, pela contrapositiva, que $n-4$ é ímpar, ou seja, existe um inteiro k tal que $n-4=2k+1 \Leftrightarrow n=2k+5$. Então,

$$3n+3=3(2k+5)+3=6k+15+3=6k+18=2(3k+9) \tag{4}$$

Logo, $3n+3$ é par.

(1) $\to$ (3). Suponha que $n-4$ é par, ou seja, existe um inteiro k tal que $n-4=2k \Leftrightarrow n=2k+4$. Então,

$$n^2+1=(2k+4)^2+1=4k^2+16k+16+1=2(2k^2+8k+8)+1 \tag{5}$$

Logo, n^2+1 é ímpar.

(3) $\to$ (1). Suponha, pela contrapositiva, que $n-4$ é ímpar, ou seja, existe um inteiro k tal que $n-4=2k+1 \Leftrightarrow n=2k+5$. Então,

$$n^2+1=(2k+5)^2+1=4k^2+20k+25+1=4k^2+20k+26=2(2k^2+10k+13) \tag{6}$$

Logo, n^2+1 é par.

4. (2.0) Considere as dois teoremas sobre os números reais x e y

Teorema 1 : Se a soma , $x+y$, não é racional, então x ou y devem ser irracionais.

Teorema 2: Se x é racional e y é irracional então $x-y$ é irracional.

(a) (1.0) Prove o Teorema 1.
Suponha, pela contrapositiva, que x e y são racionais, ou seja, existem inteiros a, b, c, d com $b \neq 0$ e $d \neq 0$ tal que $x=\frac{a}{b}$ e $y=\frac{c}{d}$. Então,

$$x+y=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \tag{7}$$

Concluímos que $x+y$ é racional já que $ad+bc \in \mathbb{Z}$, $bd \in \mathbb{Z}$ e $bd \neq 0$.

(b) (1.0) Prove o Teorema 2.
Suponha, por contradição, que x é racional, y é irracional e $x-y$ é racional, ou seja, existem inteiros a, b, c, d com $b \neq 0$ e $d \neq 0$ tal que $x=\frac{a}{b}$ e $x-y=\frac{c}{d}$. Então

$$x-y=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b}-y=\frac{c}{d} \Leftrightarrow y=\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-cb}{bd} \tag{8}$$

Logo, y é irracional e racional. Absurdo.

5. (2.0) Dado $a, b, c \in \mathbb{Z}$:

(a) (1.0) Mostre que se $a|b$ e $a|(b-c)$ então $a|c$.
Como $a|b$ e $a|(b-c)$, existem inteiros s e t tal que $b=as$ e $b-c=at$. Então,

$$b-c=at \Leftrightarrow c=b-at=as-at=a(s-t) \tag{9}$$

Logo, $a|c$

(b) (1.0) Mostre que se $a^2|b$ e $b^3|c$ então $a^6|c$.
Como $a^2|b$ e $b^3|c$, existem inteiros s e t tal que $b=a^2s$ e $c=b^3t$. Então,

$$c=b^3t=(a^2s)^3t=a^6s^2t \tag{10}$$

Logo, $a^6|c$.

6. (1.0) Seja $n \in \mathbb{Z}$. Mostre que se $n \equiv 5\ (mod\ 6)$ então $n^2 \equiv 1 (mod\ 3)$

   Como $n \equiv 5\ (mod\ 6)$, existe um inteiro k tal que $n = 6k + 5$. Então,

$$n^2 = (6k+5)^2 = 36k^2 + 60k + 25 = 3(12k^2 + 20k + 8) + 1 \quad (11)$$

   Logo, $n^2 \equiv 1(mod\ 3)$

7. Prove se a seguinte proposição é verdadeira, ou dê um contra-exemplo que mostre que ela é falsa.

   Se m e n são inteiros positivos e mn é um quadrado perfeito então m e n são quadrados perfeitos.

   Considere m = 8 e n = 8, temos que $mn = 64$ é um quadrado perfeito e m e n não são quadrados perfeitos.

8. (1.0) Descubra o seu filme predileto:

   Siga as instruções:

   - Escolha um número de 1 a 9;
   - Multiplique por 3;
   - Some 3;
   - Multiplique outra vez por 3;
   - Some os dois algarismos;

   Opções:

   (1) Um sonho de liberdade
   (2) Poderoso Chefão
   (3) Poderoso Chefão II
   (4) Batman: O cavaleiro das Trevas
   (5) 12 Homens e uma sentença
   (6) A lista de Schindler
   (7) Pulp Fiction
   (8) O Senhor dos Anéis: O Retorno do Rei
   (9) Shaolin do Sertão
   (10) Três Homens em Conflito
   (11) Clube da Luta
   (12) O Senhor dos Anéis: A Sociedade do Anel
   (13) O Império Contra-Ataca
   (14) Forrest Gump
   (15) A origem
   (16) O Senhor do Anéis: As duas Torres
   (17) Os Bons Companheiros

   Mostre que, independente da escolha inicial, todas as pessoas terão o mesmo filme predileto.

Siga as instruções:

- Escolha um número de 1 a 9; (x)
- Multiplique por 3; (3x)
- Some 3; (3x+3)
- Multiplique outra vez por 3; [3(3x+3) = 9x+9]

Logo, o resultado final das instruções (9x+9) é um múltiplo de 9. Sabemos que a soma dos dígitos de um número múltiplo de 9, também é múltiplo de 9. Dentre as opções, a única opção que é múltiplo de 9 é o filme Shaolin do Sertão.