Matemática Discreta
Lista de Exercícios 06

Indução Completa e Definições Recursivas

1 Indução completa

1. Considere $P(n)$ como a proposição que afirma que uma postagem de n centavos pode ser feita usando-se apenas selos de 3 e 5 centavos. Os itens desse exercício formam uma demonstração por indução completa de que $P(n)$ é verdadeira para $n \geq 8$.
   (a) Mostre que as proposições $P(8), P(9)$ e $P(10)$ são verdadeiras, completando o passo base da demonstração.
   (b) Qual é a hipótese indutiva da demonstração?
   (c) O que você precisa para demonstrar o passo de indução?
   (d) Complete o passo de indução para $k \geq 10$.
   (e) Explique por que esses passos mostram que esta prposição é verdadeira sempre que $n \geq 8$.
2. (a) Determine quais postagens podem ser feitas usando-se apenas selos de 4 e 11 centavos.
   (b) Demonstre sua resposta de (a) usando o princípio da indução matemática. Certifique-se de afirmar explicitamente sua hipótese indutiva no passo de indução.
   (c) Demonstre sua resposta de (a) usando a indução completa. Em que a hipótese indutiva dessa demonstração difere da demonstração usada com indução matemática?
3. Qual a quantidade de dinheiro que pode ser reunida usando apenas notas de $2 e $5? Demonstre sua resposta usando a indução completa.
4. Considere esta variação do jogo de Nim. O jogo começa com n cartas. Dois jogadores podem remover as cartas uma, duas ou três de cada vez. O jogador que remover a última carta, perde. Use a indução completa para mostrar que se cada jogador jogar com a melhor estratégia possível, o primeiro vence, se $n = 4j, 4j+2$ ou $4j+3$ para qualquer número inteiro não negativo j, e o segundo jogador vence no outro caso possível, quando $n = 4j+1$ para qualquer número inteiro não negativo j.
5. Suponha que $P(n)$ seja uma função proposicional. Determine se para cada número inteiro positivo n, a proposição $P(n)$ deve ser verdadeira, e justifique sua resposta, se
   (a) $P(1)$ for verdadeira; para todos os números inteiros positivos n, se $P(n)$ for verdadeira, então $P(n+2)$ é verdadeira.
   (b) $P(1)$ e $P(2)$ forem verdadeiros; para todos os números inteiros positivos n, se $P(n)$ e $P(n+1)$ forem verdadeiras, então $P(n+2)$ é verdadeira.
   (c) $P(1)$ for verdadeira; para todos os números inteiros positivos n, se $P(n)$ for verdadeira, então $P(2n)$ é verdadeira.
   (d) $P(1)$ for verdadeira; para todos os números inteiros positivos n, se $P(n)$ for verdadeira, então $P(n+1)$ é verdadeira.
6. Mostre que, se a proposição $P(n)$ for verdadeira para infinitos números inteiros positivos n e $P(n+1) \to P(n)$ for verdadeira para todos os números inteiros positivos n, então $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos n.
7. O que há de errado com esta "demonstração" por indução completa?
   Teorema: Para todo número inteiro não negativo n, $5n = 0$.
   Passo base: $5 \cdot 0 = 0$.
   Passo de indução: Suponha que $5j = 0$ para todos os números inteiros não negativos j com $0 \leq j \leq k$. Escreva $k+1 = i+j$, em que i e j são números naturais menores que $k+1$. Pela hipótese indutiva, $5(k+1) = 5(i+j) = 5i + 5j = 0 + 0 = 0$.

2 Definições recursivas

8. Encontre $f(1), f(2), f(3)$ e $f(4)$ se $f(n)$ for definido recursivamente por $f(0) = 1$ e para $n = 0, 1, 2, \ldots$
   (a) $f(n+1) = f(n) + 2$.
   (b) $f(n+1) = 3f(n)$.
   (c) $f(n+1) = 2^{f(n)}$.
   (d) $f(n+1) = f(n)^2 + f(n) + 1$.
9. Encontre $f(2), f(3), f(4)$ e $f(5)$ se $f(n)$ for definido recursivamente por $f(0) = -1$, $f(1) = 2$ e para $n = 1, 2, \ldots$
   (a) $f(n+1) = f(n) + 3f(n-1)$.
   (b) $f(n+1) = f(n)^2 f(n-1)$.
   (c) $f(n+1) = 3f(n)^2 - 4f(n-1)^2$.
   (d) $f(n+1) = f(n-1)/f(n)$.
10. Determine se cada uma das definições propostas abaixo é uma definição recursiva válida de uma função f a partir do conjunto dos números inteiros não negativos para o conjunto dos números inteiros. Se f for bem definida, encontre uma fórmula para $f(n)$ quando n for um número inteiro não negativo e demonstre que sua fórmula é válida.
    (a) $f(0) = 0$, $f(n) = 2f(n-2)$ para $n \geq 1$
    (b) $f(0) = 1$, $f(n) = f(n-1) - 1$ para $n \geq 1$
    (c) $f(0) = 2$, $f(1) = 3$, $f(n) = f(n-1) - 1$ para $n \geq 2$
    (d) $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(n) = 2f(n-2)$ para $n \geq 2$
    (e) $f(0) = 1$, $f(n) = 3f(n-1)$ se n for ímpar e $n \geq 1$ e $f(n) = 9f(n-2)$ se n for par e $n \geq 2$
11. Dê uma definição recursiva da sequência $\{a_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ se
    (a) $a_n = 6n$.
    (b) $a_n = 2n + 1$.
    (c) $a_n = 10^n$.
    (d) $a_n = 5$.
12. Seja F como uma função tal que $F(n)$ é a soma dos primeiros n números inteiros positivos. Dê uma definição recursiva de $F(n)$.
13. Dê uma definição recursiva de $P_m(n)$, o produto do número inteiro m pelo número inteiro não negativo n.

    Nos exercícios a seguir, f_n é o n-ésimo número de Fibonacci.
14. Demonstre que $f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n}$ quando n é um número inteiro positivo.
15. Mostre que $f_0 f_1 + f_1 f_2 + \ldots + f_{2n-1} f_{2n} = f_{2n}^2$ quando n é um número inteiro positivo.
16. Dê uma definição recursiva do conjunto dos números inteiros positivos que são multiplos de 5.
17. Dê uma definição recursiva do
    (a) conjunto de números inteiros pares.
    (b) conjunto de números inteiros positivos congruentes a 2 módulo 3.
    (c) conjunto de números inteiros positivos não divisíveis por 5.
18. Use a indução estrutural para mostrar que $n(T) \geq 2h(T) + 1$, em que T é uma árvore binária completa, $n(T)$ é igual ao número de vértices de T e $h(T)$ é a altura de T.

Respostas:

1. (a) $P(8)$ é verdadeira, porque podemos formar 8 centavos em selos com um selo de 3 centavos e 1 selo de 5 centavos. $P(9)$ é verdaeira, porque podemos formar 9 centavos com três selos de 3 centavos. $P(10)$ é verdadeira, porque podemos formar 10 centavos em selos com dois selos de 5 centavos.
   (b) A afirmação de que, usando apenas selos de 3 centavos e de 5 centavos, podemos formar j centavos em selos para todos j com $8 \leq j \leq k$, em que supomos que $k \geq 10$.
   (c) Suponha válida a hipótese de indução, podemos formar $k+1$ centavos em selos usando apenas selos de 3 e de 5 centavos.
   (d) Como $k \geq 10$, sabemos que $P(k-2)$ é verdadeira, ou seja, que podemos formar $k-2$ centavos em selos. Ponha mais um selo de 3 centavos no envelope, e teremos formado $k+1$ centavos em selos.
   (e) Completamos tanto o passo base quanto o passo base quanto o passo de indução, de modo que, pelo princípio da indução completa, a afirmação é verdadeira para todo inteiro n maior ou igual a 8.
2. (a) $4, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28$ e todos os valores maiores ou iguais a 30.
   (b) Seja $P(n)$ a afirmação de que podemos formar n centavos em selos usando apenas selos de 4 e 11 centavos. Queremos demonstrar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 30$. Para o passo base, $30 = 11 + 11 + 4 + 4$. Suponha que possamos formar k centavos em selos (a hipótese de indução); mostraremos como formar $k+1$ centavos em selos. Se os k centavos incluírem um selo de 11 centavos, então substitua-os por três selos de 4 centavos. Caso contrário, os k centavos foram formados usando apenas selos de 4 centavos. Como $k \geq 30$, devem existir pelo menos oito selos de 4 centavos envolvidos. Substitua 8 selos de 4 centavos por três selos de 11 centavos e teremos formado $k+1$ centavos em selos.
   (c) $P(n)$ é o mesmo que na parte (b). Para demonstrar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 30$, verificamos o passo base de que, $30 = 11 + 11 + 4 + 4, 31 = 11 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4, 32 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$ e $33 = 11 + 11 + 11$. Pelo passo de indução, suponha válida a hipótese de indução, de que $P(j)$ seja verdadeira para todo j com $30 \leq j \leq k$, em que k é um inteiro arbitrário maior que ou igual a 33. Queremos mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira. Como $k - 3 \geq 30$, sabemos que $P(k-3)$ é verdadeira, ou seja, podemos formar $k-3$ centavos em selos. Ponha mais um selo de 4 centavos no envelope e teremos formado $k+1$ centavos em selos. Nesta demonstração, nossa hipótese de indução era de que $P(j)$ era verdadeira para todos os valores de j entre 30 e k, inclusive, em vez de apenas $P(30)$ ser verdadeira.
3. Podemos formar todas as quantias, exceto $ 1 e $ 3. Seja $P(n)$ a afirmação de que podemos formar n dólares usando apenas notas de 2 e de 5 dólares. Queremos demonstrar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 5$. (É claro que $ 1 e $ 3 não podem ser formados e que $ 2 e $ 4 podem) Para o passo base, observe que $5 = 5$ e que $6 = 2 + 2 + 2$. Suponha válida a hipótese de indução, de que $P(j)$ seja verdadeiro para todo j com $5 \leq j \leq k$, em que k é um inteiro arbitrário maior que ou igual a 6. Queremos mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira. Como $k - 1 \geq 5$, sabemos que $P(k-1)$ é verdadeira, ou seja, que podemos formar $k-1$ dólares. Adicione mais uma outra nota de 2 dólares e teremos formado $k+1$ dólares.

4. *Passo base:* Existem quatro casos base. Se $n = 1 = 4 \cdot 0 + 1$, então, claramente o segundo jogador ganha. Se existirem duas, três ou quatro cartas($n = 4 \cdot 0 + 2$, $n = 4 \cdot 0 + 3$ ou $n = 4 \cdot 1$), então o primeiro jogador pode ganhar removendo todas, exceto uma carta. *Passo de indução:* Supoha válida a hipótese de indução completa, de que em jogos com k ou menos cartas, o primeiro jogador pode ganhar se $k \equiv 0, 2$ ou 3 (mod 4), e o segundo jogador pode ganhar se $k \equiv 1$ (mod 4). Suponha que temos um jogo com $k + 1$ cartas, com $k \geq 4$. Se $k + 1 \equiv 0$ (mod 4), então o primeiro jogador pode remover 3 cartas, deixando $k - 2$ cartas para o outro jogador. Como $k - 2 \equiv 1$ (mod 4), pela hipótese de indução, este é um jogo em que o segundo jogador, neste ponto(que é o primeiro jogador em nosso jogo), pode ganhar. Analogamente, se $k + 1 \equiv 2$ (mod 4), então o primeiro jogador pode remover uma carta; e, se $k + 1 \equiv 3$ (mod 4), então o primeiro jogador pode remover duas cartas. Finalmente, se $k + 1 \equiv 1$ (mod 4), então o primeiro jogador deve deixar $k, k - 1$ ou $k - 2$ cartas para o outro jogador. Como $k \equiv 0$(mod 4), $k - 1 \equiv 3$ (mod 4) e $k - 2 \equiv 2$ (mod 4), então, pela hipótese de indução, este é um jogo em que o primeiro jogador, naquele ponto(que é o segundo jogador em nosso jogo), pode ganhar.

5. (a) O passo de indução aqui nos permite concluir que $P(3), P(5), \ldots$ são todas verdadeiras, mas não podemos concluir nada sobre $P(2), P(4), \ldots$.
   (b) $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos n, usando indução completa.
   (c) O passo de indução aqui nos permite concluir que $P(2), P(4), P(8), P(16), \ldots$ são todas verdadeiras, mas não podemos concluir nada sobre $P(n)$ quando n não for uma potência de 2.
   (d) Isto é indução matemática; podemos concluir que $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos n.

6. Suponha, para uma demonstração por contradição, que exista algum inteiro positivo n tal que $P(n)$ não seja verdadeira. Sejam m o menor inteiro positivo maior que n para o qual $P(m)$ é verdadeira; sabemos que tal m existe porque $P(m)$ é verdadeira para infinitos valores de m. Mas sabemos que $P(m) \rightarrow P(m-1)$, de modo que $P(m-1)$ também é verdadeira. Assim, $m - 1$ não pode ser maior que n, de modo que $m - 1 = n$ e $P(n)$ é, de fato, verdadeira. Estra contradição mostra que $P(n)$ é verdadeira para todo n.

7. O erro está em ir do caso base $n = 0$ para o próximo caso, $n = 1$; não podemos escrever 1 como a soma de dois números naturais menores.

8. (a) $f(1) = 3, f(2) = 5, f(3) = 7, f(4) = 9$
   (b) $f(1) = 3, f(2) = 9, f(3) = 27, f(4) = 81$
   (c) $f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 16, f(4) = 65536$
   (d) $f(1) = 3, f(2) = 13, f(3) = 183, f(4) = 33673$

9. (a) $f(2) = -1, f(3) = 5, f(4) = 2, f(5) = 17$
   (b) $f(2) = -4, f(3) = 32, f(4) = -4096, f(5) = 536870912$
   (c) $f(2) = 8, f(3) = 176, f(4) = 92672, f(5) = 25764174848$
   (d) $f(2) = -\frac{1}{2}, f(3) = -4, f(4) = \frac{1}{8}, f(5) = -32$

10. (a) Não é válida.
    (b) $f(n) = 1 - n$. *Passo base:* $f(0) = 1 = 1 - 0$ *Passo de indução:* se $f(k) = 1 - k$, então $f(k+1) = f(k) - 1 = 1 - k - 1 = 1 - (k+1)$.
    (c) $f(n) = 4 - n$ se $n > 0$ e $f(0) = 2$*Passo base:* $f(0) = 2$ e $f(1) = 3 = 4 - 1$ *Passo de indução:* (com $k \geq 1$): $f(k+1) = f(k) - 1 = (4-k) - 1 = 4 - (k+1)$.
    (d) $f(n) = 2^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}$. *Passo base:* $f(0) = 1 = 2^{\lfloor (0+1)/2 \rfloor}$ e $f(1) = 2 = 2^{\lfloor (1+1)/2 \rfloor}$ *Passo de indução:* (com $k \geq 1$) : $f(k+1) = 2f(k-1) = 2 \cdot 2^{\lfloor k/2 \rfloor} = 2^{\lfloor k/2+1 \rfloor} = 2^{\lfloor ((k+1)+1)/2 \rfloor}$
    (e) $f(n) = 3^n$. *Passo base:* Trivial. *Passo de indução:* Para n ímpar, $f(n) = 3f(n-1) = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$; e para $n > 1$ par, $f(n) = 9f(n-2) = 9 \cdot 3^{n-2} = 3^n$.

11. Existem muitas possibilidades corretas de resposta. Daremos algumas relativamente simples.
    (a) $a_{n+1} = a_n + 6$ para $n \geq 1$ e $a_1 = 6$
    (b) $a_{n+1} = a_n + 2$ para $n \geq 1$ e $a_1 = 3$
    (c) $a_{n+1} = 10a_n$ para $n \geq 1$ e $a_1 = 10$
    (d) $a_{n+1} = a_n$ para $n \geq 1$ e $a_1 = 5$

12. $F(0) = 0, F(n) = F(n-1) + n$ para $n \geq 1$

13. $P_m(0) = 0, P_m(n+1) = P_m(n) + m$

14. Seja $P(n)$ a afirmação "'$f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n}$". *Passo base:* $P(1)$ é verdadeira porque $f_1 = 1 = f_2$. *Passo de indução:* Suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Então '$f_1 + f_3 + \ldots + f_{2k-1} + f_{2k+1} = f_{2k} + f_{2k+1} = f_{2k+2} = f_{2(k+1)}$.

15. *Passo base:* $f_0 f_1 + f_1 f_2 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1^2 = f_2^2$. *Passo de indução:* Suponha que $f_0 f_1 + f_1 f_2 + \ldots + f_{2k-1} f_{2k} = f_{2k}^2$. Então $f_0 f_1 + f_1 f_2 + \ldots + f_{2k-1} f_{2k} + f_{2k} f_{2k+1} + f_{2k+1} f_{2k+2} = f_{2k}^2 + f_{2k} f_{2k+1} + f_{2k+1} f_{2k+2} = f_{2k}(f_{2k} + f_{2k+1}) + f_{2k+1} f_{2k+2} = f_{2k} f_{2k+2} + f_{2k+1} f_{2k+2} = (f_{2k} + f_{2k+1}) f_{2k+2} = f_{2k+2}^2$.

16. $5 \in S$ e $x + y \in S$ se $x, y \in S$.

17. (a) $0 \in S$ e, se $x \in S$, então $x + 2 \in S$ e $x - 2 \in S$.
    (b) $2 \in S$ e, se $x \in S$, então $x + 3 \in S$.
    (c) $1 \in S, 2 \in S, 3 \in S, 4 \in S$ e, se $x \in S$, então $x + 5 \in S$.

18. *Passo base*: Para a árvores binária completa consistindo apenas na raiz o resultado é verdadeiro porque $n(T)$=1 e $h(T)$=0, e $1 \geq 2.0 + 1$. *Passo de indução*: Suponha que $n(T_1) \geq 2h(T_1) + 1$ e $n(T_2) \geq 2h(T_2) + 1$. Pelas definições recursivas de $n(T)$ e $h(T)$, temos $n(T) = 1 + n(T_1) + n(T_2)$ e $h(T) = 1 + max(h(T_1), h(T_2))$. Portanto, $n(T) = 1 + n(T_1) + n(T_2) \geq 1 + 2h(T_1) + 1 + 2h(T_2) + 1 \geq 1 + 2.max(h(T_1), h(T_2)) + 2 = 1 + 2(max(h(T_1), h(T_2)) + 1) = 1 + 2h(T)$.

Questões adicionais:

1. Use a indução completa para mostrar que todos os dominós caem em um arranjo infinito de dominós se soubermos que os três primeiros caem e que quando um dominó cai, aquele que fica três posições a frente também cai.
2. Considere $P(n)$ como a proposição que afirma que uma postagem de n centavos pode ser feita usando-se apenas selos de 4 e 7 centavos. Os itens deste exercício formam uma demonstração por indução completa de que $P(n)$ é verdadeira para $n \geq 18$.
   (a) Mostre que as proposições $P(18)$, $P(19)$, $P(20)$ e $P(21)$ são verdadeiras, completando o passo base da demonstração.
   (b) Qual é a hipótese indutiva da demonstração?
   (c) O que você precisa para demonstrar o passo de indução?
   (d) Complete a etapa indutiva para $k \geq 21$.
   (e) Explique por que esses passos mostram que a proposição é verdadeira sempre que $n \geq 18$.
3. (a) Determine quais postagens podem ser feitas usando-se apenas selos de 3 e 10 centavos.
   (b) Demonstre sua resposta de (a) usando o princípio da indução matemática. Certifique-se de afirmar explicitamente sua hipótese indutiva no passo de indução.
   (c) Demonstre sua resposta de (a) usando o princípio da indução completa. Em que difere a hipótese indutiva dessa demonstração da demonstração usada com indução matemática?
4. Suponha que uma loja ofereça vales-presente nos valores de \$ 25 e \$ 40. Determine quais valores você pode juntar usando estes vales-presente. Demonstre sua resposta usando a indução completa.
5. Assuma que uma barra de chocolate tenha n quadrados organizados em formato retangular. A barra, com um pedaço retangular a menos que a barra original, pode ser quebrada na horizontal ou na vertical separando-se os quadrados. Admitindo que apenas um pedaço pode ser quebrado de cada vez, quantas vezes você deve quebrar a barra sucessivamente em n quadrados separados? Use a indução completa para demonstrar sua resposta.
6. Use a indução completa para mostrar que todo número inteiro positivo n pode ser escrito como uma soma de potências distintas de dois, ou seja, como uma soma de um subconjunto de números inteiros $2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4$, e assim por diante. [*Dica*: Para o passo de indução, considere separadamente o caso em que $k+1$ é par e em que ele é ímpar. Quando for par, note que $(k+1)/2$ é um número inteiro.]
7. Suponha que você comece com um pilha de n pedras e divida-a em n pilhas com uma pedra cada, separando, sucessivamente, uma pilha de pedras em duas menores. Cada vez que você faz a divisão, multiplica o número de pedras em cada uma das pilhas menores formadas; para que elas tenham r e s pedras, respectivamente, você computa rs. Mostre que não importa como você separa as pilhas, a soma dos produtos computados em cada etapa é igual a $n(n-1)/2$.
8. Demonstre que o primeiro jogador tem uma estratégia para ganhar o jogo Chomp, introduzido no Exemplo 12 da Seção 1.7, se o quado inicial tiver dois quadrados de largura, ou seja, um quadro de $2 \times n$. [*Dica* : Use a indução completa. O primeiro movimento do primeiro jogador deve ser mastigar o biscoito na linha inferior da extremidade direita.]
9. Use a indução completa para mostrar que quando um polígono convexo P com vértices consecutivos $v_1, v_2, \ldots, v_n$ é um triangulado em $n-2$ triângulos, os $n-2$ triângulos podem ser numerados em 1, 2, ..., $n-2$ para que v_i seja um vértice do triângulo i, para $i = 1, 2, \ldots, n-2$.
10. Suponha que P seja um polígono simples com vértices $v_1, v_1, \ldots, v_n$ listados como vértices consecutivos que estão ligados por um lado,e v_1 e v_n estão ligados por outro lado. Um vértice v_i é chamado de **orelha** se o segmento de reta que liga dois vértices adjacentes a v_i for uma diagonal interna do polígono simples. Duas orelhas v_i e v_j são chamadas de **não sobrepostas** se os interiores dos triângulos com vértices v_i e seus dois vértices adjacentes e v_j e seus dois vértices adjacentes não se cruzarem. Demonstre que todo polígono simples com pelo menos quatro vértices tem pelo menos duas orelhas não sobrepostas.
11. Considere P(n) como a proposição que afirma que quando as diagonais que não se cruzam são desenhadas em um polígono convexo com n lados, pelo menos dois vértices do polígono não são pontos finais de qualquer uma dessas diagonais.
    (a) Mostre que quando tentamos demonstrar $P(n)$ para todos os números inteiros n com $n \geq 3$ usando a indução completa, o passo de indução não se sustenta.
    (b) Mostre que podemos demonstrar que $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros n com $n \geq 3$, demonstrando pela indução completa a asserção forte $Q(n)$, para $n \geq 4$, em que $Q(n)$ afirma que sempre que diagonais que não se cruzam são desenhadas dentro de um polígono convexo com n lados, pelo menos dois vértices *não adjacentes* não são pontos finais de qualquer uma dessas diagonais. '
12. Uma tarefa estável, definida no preâmbulo dos Exercício 58 da Seção 3.1, é chamada de **ideal para os pretendentes** se não houver tarefas estáveis nas quais um pretendente é colocado em frente de uma pretendente de sua preferência na tarefa estável. Use a indução completa para mostrar que o algoritmo de aceitação produz uma tarefa estável que é ideal para os pretendentes.
13. Suponha que $P(n)$ seja uma função proposicional. Determine se para todo número inteiro não negativo n, a proposição $P(n)$ deve ser verdadeira se
    (a) $P(0)$ for verdadeira; para todos os números inteiros não negativos n, se $P(n)$ for verdadeira, então $P(n+2)$ é verdadeira.
    (b) $P(0)$ for verdadeira; para todos os números inteiros não negativos n, se $P(n)$ for verdadeira, então $P(n+3)$ é verdadeira.
    (c) $P(0)$ e $P(1)$ forem verdadeiras; para todos os números inteiros não negativos n, se $P(n)$ e $P(n+1)$ forem verdadeiras, então $P(n+2)$ é verdadeira.
    (d) $P(0)$ for verdadeira; para todos os números inteiros não negativos n, se $P(n)$ for verdadeira, então $P(n+2)$ e $P(n+3)$ são verdadeiras.
14. Considere b como um número inteiro dado e j como um número inteiro positivo dado. Mostre que, se $P(b), P(b+1), \ldots, P(b+j)$ forem verdadeiras se $[P(b) \wedge P(b+1) \wedge \ldots \wedge P(b+j)] \rightarrow P(k+1)$ for verdadeira para todo número inteiro positivo $k \geq b+j$, então $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros n com $n \geq b$
15. Encontre a falha na seguinte "demonstração" de que $a^n = 1$ para todos os números inteiros não negativos n, sempre que a for um número real diferente de zero. *Passo base:* $a^0 = 1$ é verdadeira pela definição de a^0. *Passo de Indução:* Suponha que $a^j = 1$ para todos os números inteiros não negativos j com $j \leq k$. Então, note que $a^{k+1} = \frac{a^k \cdot a^k}{a^{k-1}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$.
16. Encontre a falha na seguinte "demonstração" de que toda postagem de três centavos ou mais pode ser feita usando-se apenas selos três e quatro centavos. *Passo base:* Podemos fazer postagens de três centavos com apenas um selo de três, e podemos fazer postagens de quatro centavos usando apenas um selo de quatro centavos. *Passo de Indução:* Assuma que podemos fazer postagens de j centavos para todos os números inteiros não negativos j com $j \leq k$ usando apenas selos de três e quatro centavos.Então, podemos fazer postagens de $k+1$ centavos substituindo um selo de três centavos por um selo de quatro centavos ou substituindo dois selos de quatro centavos por três selos de três centavos.
17. Demonstre que $\sum_{j=1}^{n} j(j+1)(j+2)\ldots(j+k-1) = n(n-1)(n+2)\ldots(n+k)/(k+1)$ para todos os números inteiros positivos k e n. [Dica: Use a técnica ultilizada no Exercício 17.]
18. A propriedade de boa ordenação poser ultilizada para mostrat que há um único máximo divisor comum de dois números ínteiros positivos. Considere a e b como números inteiros positivos , e considere S como o conjunto dos números inteiros positivos na forma $as + bt$, em que s e t são números inteiros.
    (a) Mostre que S não é vazio.
    (b) Use a propriedade da boa ordenação para mostrar que S tem um menor elemento c.
    (c) Mostre que se d for um divisor comum de a e b, então d é divisor de c.
    (d) Mostre que se $c \mid a$ e $c \mid b$.[Dica: primeiro, assuma que c $\nmid$ a. Então, $a = qc + r$, em que $0 < r < c$. Mostre que $r \in S$, contradizendo a escolha por c.]
    (e) Conclua a partir dos itens (c) e (d) que o máximo divisor comum de a e b existe. Termine a demonstração mostrando que este máximo divisor comum é único.
19. Use a indução matemática para mostrar que um tabuleiro de damas retangular com um número par de células e dois quadrados faltando, um branco e um preto, pode ser preenchido por dominós.
20. Use a propriedade da boa ordenação para mostrar que se x e y forem números reais com $x < y$, então existe um número racional r com $x < r < y$. [Dica: Use a propriedade de Arquimedes, dada no Apêndice 1, para encontrar um número inteiro positivo A com $A > 1/(y-x)$. Então, mostre que existe um número racional r com denominador A entre x e y, procurando os números $\lfloor x \rfloor + j/A$, em que j é um número inteiro positivo.]
21. *42 Mostre que o princípio da indução matemática e a indução completa são equivalentes, ou seja, cada um pode ser mostrado como válido a partir do outro.
22. Encontre $f(1), f(2), f(3), f(4)$ e $f(5)$ se $f(n)$ for definido recursivamente por $f(0) = 3$ e para $n = 0, 1, 2, \ldots$
    (a) $f(n+1) = -2f(n)$.
    (b) $f(n+1) = 3f(n) + 7$.
    (c) $f(n+1) = f(n)^2 - 2f(n) - 2$.
    (d) $f(n+1) = 3^{f(n)/3}$.
23. Encontre $f(2), f(3), f(4)$ e $f(5)$ se f for definido recursivamente por $f(0) = f(1) = 1$ e para $n = 1, 2, \ldots$
    (a) $f(n+1) = f(n) - f(n-1)$.
    (b) $f(n+1) = f(n)f(n-1)$.
    (c) $f(n+1) = f(n)^2 + f(n-1)^3$.
    (d) $f(n+1) = f(n)/f(n-1)$.
24. Determine se cada uma das definições propostas a seguir é uma definição recursiva válida de uma função f a partir do conjunto dos números inteiros não negativos para o conjunto dos números inteiros. Se f for bem definida, encontre uma fórmula para $f(n)$ quando n for um número inteiro não nagativo e demonstre que sua fórmula é válida.
    (a) $f(0) = 1, f(n) = -f(n-1)$ para $n \geq 1$
    (b) $f(0) = 1, f(1) = 0, f(2) = 2, f(n) = 2f(n-3)$ para $n \geq 3$
    (c) $f(0) = 0, f(1) = 1, f(n) = 2f(n+1)$ para $n \geq 2$
    (d) $f(0) = 0, f(1) = 1, f(n) = 2f(n-1)$ para $n \geq 1$
    (e) $f(0) = 2, f(n) = f(n-1)$ se n for ímpar e $n \geq 1$ e $f(n) = 2f(n-2)$ se $n \geq 2$
25. Dê uma definição recursiva da sequêcia $\{a_n\}, n = 1, 2, 3, \ldots$ se
    (a) $a_n = 4n - 2$.
    (b) $a_n = 1 + (-1)^n$.
    (c) $a_n = n(n+1)$.
    (d) $a_n = n^2$.

26. Dê uma definição recursiva de $S_m(n)$, a soma do número inteiro m pelo número inteiro não negativo n.

Nos exercícios 06 a 10, fn é o n-ésimo número de Fibonacci.

27. Demonstre que $f_1^2 + f_2^2 + ... + f_n^2 = f_n f_{n+1}$ quando n é um número inteiro positivo.
28. Mostre que $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$ quando n é um número inteiro positivo.
29. Mostre que $f_0 - f_1 + f_2 - ... - f_{2n-1} + f_{2n} = f_{2n-1} - 1$ quando n é um número inteiro positivo.
30. Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mostre que

$$A^n = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}$$

quando n é um número inteiro positivo.

31. Dê uma definição recursiva das funções max e mim, para que max$(a_1, a_2, ..., a_n)$ e mim$(a_1, a_2, ..., a_n)$ sejam o máximo e o mínimo de n números $a_1, a_2, ..., a_n$, respectivamente.
32. Mostre que o conjunto S, definido por $1 \in$ e $s + t \in S$ sempre que $s \in S$ e $t \in S$, é o conjunto dos números inteiros positivos
33. Dê uma definição recursiva do

    (a) conjunto de números inteiros positivos ímpares.

    (b) conjunto dos números inteiros positivos que são potências de 3.

    (c) conjunto de polinômios com coeficientes inteiros.

34. Consulte S como o subconjunto do conjunto de pares ordenados de números inteiros definido recursivamente por

    Passo base: $(0, 0) \in S$.

    Passo recursivo: Se $(a, b) \in S$, então $(a + 2, b + 3) \in S$ e $(a + 3, b + 2) \in S$.

    (a) Liste os elementos de S produzidos pelas primeiras cinco aplicações do passo recursivo.
    (b) Use a indução completa no número de aplicações do passo recursivo da definição para mostrar que $5 \mid a + b$ quando $(a, b) \in S$.
    (c) Use a indução estrutural para mostrar que $5 \mid a + b$ quando $(a, b) \in S$.

35. Dê uma definição recursiva para cada um dos conjuntos de pares ordenados de números inteiros positivos abaixo. [*Dica:* Organize os pontos do conjunto no plano e procure por linhas que contenham pontos no conjunto.]

    (a) $S = \{(a, b) \mid a \in \mathbf{Z}^+, b \in \mathbf{Z}^+$ e $a + b$ é impar $\}$
    (b) $S = \{(a, b) \mid a \in \mathbf{Z}^+, b \in \mathbf{Z}^+$ e $a \mid b\}$
    (c) $S = \{(a, b) \mid a \in \mathbf{Z}^+, b \in \mathbf{Z}^+$ e $3 \mid a + b\}$

36. Demonstre que em uma cadeia de bits, a sequência de 01 aparece no máximo uma vez mais que a sequência 10.
37. (a) Dê uma definição recursiva da função $uns(s)$, que contém o número de uns em uma cadeia de bits s.
    (b) Use a indução estrutural para demonstrar que $uns(st) = uns(s) + uns(t)$.
38. Encontre o reverso das cadeiasde bits a seguir.

    (a) 0101

    (b) 1 1011

    (c) 1000 1001 0111

39. Use a indução estrutural para demonstrar que $(w_1w_2)^R = w_2^R w_1^R$.
40. Dê uma definição recursiva do conjunto de cadeias de bits que são palíndromos.
41. Defina recursivamente o conjunto de cadeias de bits que têm mais zeros que uns.
42. Mostre que $(w^R)^i = (w^i)^R$ sempre que w for uma cadeia e i for um número inteiro não negativo; ou seja, mostre que a i-ésima potência da reversa de uma cadeia é a reversa da i-ésima potência da cadeia.
43. Use a indução estrutural para mostrar que $l(T)$, o número de folhas de uma árvore binária completa T, é 1 mais $i(T)$, o número de vértices internos de T.
44. Use a indução generalizada, como foi feito no Exemplo 15, para mostrar que se $a_{m,n}$ for definido recursivamente por $a_{1,1} = 5$ e

$$\mathbf{a_{m,n}} = \left\{ \begin{array}{ll} a_{m-1,n} + 2 & \text{se } n = 1 \text{ e } m > 1 \\ a_{m,n-1} + 2 & \text{se } n > 1, \end{array} \right\}$$

então $a_{m,n} = 2(m + n) + 1$ para todo $(m, n) \in \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$.

45. Encontre os valores abaixo para a função de Ackermann.

    (a) $A(1, 0)$

    (b) $A(0, 1)$

    (c) $A(1, 1)$

    (d) $A(2, 2)$

46. Mostre que $A(1, n) = 2^n$ sempre que $n \geq 1$.
47. Encontre $A(3, 4)$.
48. Demonstre que $A(m+1, n) \geq A(m, n)$ sempre que m e n forem números inteiros não negativos.
49. Use a indução matemática para demonstrar que uma função F definida especificando-se $F(0)$ e uma regra para obter $F(n + 1)$ de $F(n)$ é bem definida.
50. Mostre que cada uma das definições recursivas propostas abaixo de uma função no conjunto dos números inteiros positivos não produz uma função bem definida.

    (a) $F(n) = 1 + F(\lfloor n/2 \rfloor)$ para $n \geq 1$ e $F(1) = 1$.

    (b) $F(n) = 1 + F(n - 3)$ para $n \geq 2$, $F(1) = 2$, $F(2) = 3$.

    (c) $F(n) = 1 + F(n/2)$ para $n \geq 2$, $F(1) = 1$, $F(2) = 2$.

    (d) $F(n) = 1 + F(n/2)$ se n for par e $n \geq 2$, $F(n) = 1 - F(n - 1)$ se n for ímpar e $F(1) = 1$.

    (e) $F(n) = 1 + F(n/2)$ se n for par e $n \geq 2$, $F(n) = F(3n - 1)$ se n for ímpar e $n \geq 3$ e $F(1) = 1$.

51. Encontre cada um dos valores abaixo:

    (a) $log^{(2)}16$

    (b) $log^{(3)}256$

    (c) $log^{(3)}2^{2^{65536}}$

52. Encontre o maior número inteiro n, tal que $log^*\ n = 5$. Determine o número de dígitos decimais nesse múmero.

53. Considere $f(n) = n/2$. Encontre uma fórmula para $f^{(k)}(n)$. Qual o valor de $f_1^*(n)$ quando n for um número inteiro positivo?