Matemática Discreta
Lista de Exercícios 05

Indução Matemática

1. Considere $P(n)$ como a proposição de que $1^2+2^2+\ldots+n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ para todo número inteiro positivo n.

   (a) Qual é a proposição $P(1)$?

   (b) Mostre que P(1) é verdadeira, completando o passo base da demonstração.

   (c) Qual é a hipótese indutiva?

   (d) O que você precisa para demonstrar o passo de indução?

   (e) Complete o passo de indução.

   (f) Explique por que esses passos mostram que esta fórmula é verdadeira sempre que n for um número inteiro positivo.

2. Demonstre que $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n+1)^2 = (n+1)(2n+1)(2n+3)/3$ sempre que n for um número inteiro não negativo.
3. Demonstre que $3+3\cdot5+3\cdot5^2+\ldots+3\cdot5^n = 3(5^{n+1}-1)/4$ sempre que n for um número inteiro não negativo.
4. (a) Encontre uma fórmula para a soma dos primeiros n números inteiros positivos e pares.

   (b) Demonstre a fórmula que você conjecturou no item (a).
5. (a) Encontre uma fórmula para $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}$ examinando os valores dessa expressão para pequenos valores de n.

   (b) Demonstre a fórmula que você conjecturou no item (a).
6. Demonstre que $1^2-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}n(n+1)/2$ sempre que n for um número inteiro positivo.
7. Demonstre que, para todo número inteiro positivo n, $1\cdot2+2\cdot3+\ldots+n(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$.
8. Demonstre que $\sum_{j=1}^{n} j^4 = n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30$ sempre que n for um número inteiro positivo.
9. Considere $P(n)$ como a proposição de que $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2} < 2-\frac{1}{n}$, em que n é um número inteiro maior que 1.

   (a) Qual é a proposição $P(2)$?

   (b) Mostre que $P(2)$ é verdadeira, completando o passo base da demonstração.

   (c) Qual é a hipótese indutiva?

   (d) O que você precisa para demonstrar o passo de indução?

   (e) Complete o passo de indução.

   (f) Explique por que esses passos mostram que a inequação é verdadeira sempre que n for um número inteiro maior que 1.

10. Demonstre que $2^n > n^2$ se n for um número inteiro maior que 4.
11. Para quais números inteiros não negativos n é $2n+3 \leq 2^n$? Demonstre sua resposta.
12. Seja $H_n = 1+1/2+1/3+\cdots+1/n$ o n-ésimo número harmônico. Demonstre que $H_{2^n} \leq 1+n$ sempre que n for um número inteiro não negativo.
13. Demonstre que 2 divide n^2+n sempre que n for um número inteiro positivo.
14. Demonstre que 5 divide n^5-n sempre que n for um número inteiro não negativo.
15. Demonstre que n^2-1 é divisível por 8 sempre que n for um número inteiro positivo e ímpar.
16. Demonstre que, se n for um número inteiro positivo, então 133 divide $11^{n+1}+12^{2n-1}$.
17. Demonstre que, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forem conjuntos, tal que $A_j \subseteq B_j$ para $j = 1, 2, \ldots, n$, então $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} B_j$.
18. Demonstre que, se A_1, A_2, ..., A_n e B forem conjuntos, então $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)$.
19. Demonstre que, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forem subconjuntos de um conjunto universo U, então $\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}$
20. Demonstre que um conjunto com n elementos tem $n\,(n-1)/2$ subconjuntos com dois elementos sempre que n for um número inteiro maior ou igual a 2.
21. O que está errado na "prova"abaixo de que todos os cavalos são da mesma cor?
    Considere $P(n)$ como a proposição de que todos os cavalos em um conjunto de n cavalos são da mesma cor.
    Passo Base: Certamente, $P(1)$ é verdadeira.
    Passo de Indução: Assuma que $P(k)$ seja verdadeira, assim, todos os cavalos em qualquer conjunto de k cavalos são da mesma cor. Considere quaisquer $k+1$ cavalos; numere-os como $1, 2, 3, \ldots, k, k+1$. Agora, os primeiros k desses cavalos devem ter a mesma cor, e os últimos k cavalos devem ser também da mesma cor. Como o conjunto dos primeiros k cavalos e o cojunto dos últimos k cavalos são sobrepostos (interseção não vazia), todos os $k+1$ cavalos devem ser da mesma cor. Isso mostra que $P(k+1)$ é verdadeira e termina a demonstração por indução.
22. O que está errado nesta "demonstração"?
    Teorema: Para todo número inteiro positivo n, se x e y forem números inteiros positivos com $\max(x, y) = n$, então $x = y$.
    Passo base: Suponha que $n = 1$. Se $\max(x, y)$=1 e x e y forem números inteiros positivos, temos x=1 e y=1.
    Passo de indução: Considere k como um número inteiro positivo. Assuma que sempre que $\max(x, y) = k$ e x e y forem números inteiros positivos, então $x = y$. Agora considere $\max(x, y) = k+1$, em que x e y são números inteiros positivos. Então, $\max(x-1, y-1) = k$, assim, pela hipótese indutiva, $x-1 = y-1$. Temos que $x = y$, completando o passo de indução .
23. Suponha que m seja um inteiro positivo. Use a indução matemática para demonstrar que se a e b forem números inteiros com $a \equiv b(\mathbf{mod}\ m)$, então $a^k \equiv b^k(\mathbf{mod}\ m)$ sempre que k for um número inteiro não negativo.

Respostas:

1. (a) $1^2 = 1\cdot2\cdot3/6$

   (b) Ambos os lados de $P(1)$ mostrados na parte (a) são iguais a 1.

   (c) $1^2+2^2+\ldots+k^2 = k(k+1)(2k+1)/6$

   (d) Para cada $k \geq 1$, que $P(k)$ implica $P(k+1)$; em outras palavras, que, supondo a hipótese de indução [veja a parte (c)], podemos mostrar que $1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2 = (k+1)(k+2)(2k+3)/6$

   (e) $(1^2+2^2+\ldots+k^2)+(k+1)^2 = [k(k+1)(2k+1)/6]+(k+1)^2 = [(k+1)/6][k(2k+1)+6(k+1)] = [(k+1)/6](2k^2+7k+6) = [(k+1)/6](k+2)(2k+3) = (k+1)(k+2)(2k+3)/6$

   (f) Completamos ambos, o passo base e o passo de indução, de modo que, pelo princípio da indução matemática, a afirmação é verdadeira para todo inteiro positivo n.
2. Seja $P(n)$ a afirmação "$1^2+3^2+\ldots+(2n+1)^2 = (n+1)(2n+1)(2n+3)/3$."*Passo base:* $P(0)$ é verdadeira porque $1^2 = 1 = (0+1)(2\cdot0+1)(2\cdot0+3)/3$. *Passo de indução:* Suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Então $1^2+3^2+\ldots+(2k+1)^2+[2(k+1)+1]^2 = (k+1)(2k+1)(2k+3)/3+(2k+3)^2 = (2k+3)[(k+1)(2k+1)/3+(2k+3)] = (2k+3)(2k^2+9k+10)/3 = (2k+3)(2k+5)(k+2)/3 = [(k+1)+1][2(k+1)+1][2(k+1)+3]/3$.
3. Seja $P(n)$ a afirmação "$\sum_{j=0}^{n} 3\cdot5^j = 3(5^{n+1}-1)/4$". *Passo base:* $P(0)$ é verdadeira porque $\sum_{j=0}^{0} 3\cdot5^j = 3 = 3(5^1-1)/4$. *Passo de indução:* Suponha que $\sum_{j=0}^{k} 3\cdot5^j = 3(5^{k+1}-1)/4$. Então $\sum_{j=0}^{k+1} 3\cdot5^j = (\sum_{j=0}^{k} 3\cdot5^j)+3\cdot5^{k+1} = 3(5^{k+1}-1)/4+3\cdot5^{k+1} = 3(5^{k+1}+4\cdot5^{k+1}-1)/4 = 3(5^{k+2}-1)/4$
4. (a) $2+4+6+\ldots+2n = n(n+1)$

   (b) *Passo base:* $2 = 1\cdot(1+1)$ é verdadeira. *Passo de indução:* Suponha que $2+4+6+\ldots+2k = k(k+1)$. Então $(2+4+6+\ldots+2k)+2(k+1) = k(k+1)+2(k+1) = (k+1)(k+2)$.
5. (a) $\sum_{j=1}^{n} 1/2^j = (2^n-1)/2^n$

   (b) *Passo base:* $P(1)$ é verdadeiro porque $\frac{1}{2} = (2^1-1)/2^1$. *Passo de indução:* Suponha que $\sum_{j=1}^{k} 1/2^j = (2^k-1)/2^k$. Entao $\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{2^j} = (\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^j})+\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^k-1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1}-2+1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}$.
6. Seja $P(n)$ a afirmação "$1^2-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}n(n+1)/2$". *Passo base:* $P(1)$ é verdadeira porque $1^2 = 1 = (-1)^0 1^2$. *Passo de indução:* Suponha que P(k) seja verdadeira. Então $1^2-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{k-1}k^2+(-1)^k(k+1)^2 = (-1)^{k-1}k(k+1)/2+(-1)^k(k+1)^2 = (-1)^k(k+1)[-k/2+(k+1)] = (-1)^k(k+1)[(k/2)+1] = (-1)^k(k+1)(k+2)/2$.
7. Seja $P(n)$ a afirmação "$1\cdot2+2\cdot3+\ldots+n(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$". *Passo base:* $P(1)$ é verdadeira porque $1\cdot2 = 2 = 1(1+1)(1+2)/3$. *Passo de indução:* Suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Então $1\cdot2+2\cdot3+\ldots+k(k+1)+(k+1)(k+2) = [k(k+1)(k+2)/3]+(k+1)(k+2) = (k+1)(k+2)[(k/3)+1] = (k+1)(k+2)(k+3)/3$.
8. Seja $P(n)$ a afirmação $1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4 = n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30$. $P(1)$ é verdadeira porque $1\cdot2\cdot3\cdot5/30 = 1$. Supondo que $P(k)$ seja verdadeira. Então $(1^4+2^4+3^4+\ldots+k^4)+(k+1)^4 = k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)/30+(k+1)^4 = [(k+1)/30][k(2k+1)(3k^2+3k-1)+30(k+1)^3] = [(k+1)/30](6k^4+39k^3+91k^2+89k+30) = [(k+1)/30](k+2)(2k+3)[3(k+1)^2+3(k+1)-1]$. Isto mostra que $P(k+1)$ é verdadeira.
9. (a) $1+\frac{1}{4} < 2-\frac{1}{2}$

   (b) É verdadeira porque $5/4$ é menor que $6/4$.

   (c) $1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{k^2} < 2-\frac{1}{k}$

   (d) Para cada $k \geq 2$, em que $P(k)$ implica em $P(k+1)$; em outras palavras, queremos mostrar que, supondo a hipótese de indução [veja a parte (c)], podemos mostrar que $1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2} < 2-\frac{1}{k+1}$

   (e) $1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2} < 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2} = 2-[\frac{1}{k}-\frac{1}{(k+1)^2}] = 2-[\frac{k^2+2k+1-k}{k(k+1)^2}] = 2-\frac{k^2+k}{k(k+1)^2}-\frac{1}{k(k+1)^2} = 2-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k(k+1)^2} < 2-\frac{1}{k+1}$

   (f) Completamos ambos, o passo base e o passo de indução, de modo que, pelo princípio da indução matemática, a afirmação é verdadeira para todo inteiro n maior que 1.
10. Seja $P(n)$ a afirmação "$2^n > n^2$". *Passo base:* $P(5)$ é verdadeira porque $2^5 = 32 > 25 = 5^2$. *Passo de indução:* Suponha que $P(k)$ seja verdadeira, ou seja, $2^k > k^2$. Então $2^{k+1} = 2\cdot2^k > k^2+k^2 > K^2+4k \geq k^2+2k+1 = (k+1)^2$ porque $k > 4$.
11. Por inspeção, encontramos que a desigualdade $2n+3 \leq 2^n$ não é válida para $n = 0, 1, 2, 3$. Seja $P(n)$ a proposição de que esta desigualdade vale para o inteiro positivo n. $P(4)$, o caso base, é verdadeira porque $2\cdot4+3 = 11 \leq 16 = 2^4$. Para o passo de indução, suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Então, pela hipótese de indução, $2(k+1)+3 = (2k+3)+2 < 2^k+2$. Mas como $k \geq 1$, $2^k+2 \leq 2^k+2^k = 2^{k+1}$. Isto mostra que $P(k+1)$ é verdadeira.

12. Seja $P(n)$ a afirmação "$H_{2^n} \leq 1 + n$". *Passo base:* $P(0)$ é verdadeira porque $H_{2^0} = H_1 = 1 \leq 1 + 0$. *Passo de indução:* Suponha que $H_{2^k} \leq 1 + k$. Então $H_{2^{k+1}} = H_{2^k} + \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{j} \leq 1 + k + 2^k(\frac{1}{2^k+1}) < 1 + k + 1 = 1 + (1 + k)$.
13. *Passo base:* $1^2 + 1 = 2$ é divisível por 2. *Passo de indução:* Suponha a hipótese de indução, de que $k^2 + k$ é divisível por 2. Então $(k+1)^2 + (k+1) = k^2 + 2k + 1 + k + 1 = (k^2 + k) + 2(k+1)$, a soma de um múltiplo de 2 (pela hipótese de indução) é um múltiplo de 2 (por definição), logo, divisível por 2.
14. Seja $P(n)$ a afirmação "$n^5 - n$ *é divisível por* 5". *Passo base:* $P(0)$ é verdadeira porque $0^5 - 0 = 0$ é divisível por 5. *Passo de indução:* Suponha que $P(k)$ seja verdadeira, isto é, $k^5 - 5$ é divisível por 5. Então $(k+1)^5 - (k+1) = (k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) - (k+1) = (k^5 - k) + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)$ também é divisível por 5, porque ambos os termos nesta soma são divisíveis por 5.
15. Seja $P(n)$ a proposição de que $(2n-1)^2 - 1$ é divisível por 8. O caso base $P(1)$ é verdadeiro porque $8 \mid 0$.

    Agora, suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Como $[2(k+1) - 1]^2 - 1 = [(2k - 1)^2 - 1] + 8k$, $P(k+1)$

    é verdadeira porque ambos os termos no lado direito são divisíveis por 8. Isto mostra que $P(n)$ é verdadeira para

    todos os inteiros positivos n, de modo que $m^2 - 1$ é divisível por 8 sempre que m for um inteiro positivo ímpar.
16. *Passo base:* $11^{1+1} + 12^{2\cdot 1-1} = 121 + 12 = 133$. *Passo de indução:* Suponha válida a hipótese de indução, de que $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ é divisível por 133. Então, $11^{(n+1)+1} + 12^{2(n+1)-1} = 11 \cdot 11^{n+1} + 144 \cdot 12^{2n-1} = 11 \cdot 11^{n+1} + (11 + 133) \cdot 12^{2n-1} = 11(11^{n+1} + 12^{n-1}) + 133 \cdot 12^{2n-1}$. A expressão entre parênteses é divisível por 133 pela hipótese de indução, e, obviamente, o segundo termo é divisível por 133, de modo que a quantidade toda é divisível por 133, como desejado.
17. *Passo base:* $A_1 \subseteq B_1$ implica tautologicamente que $\bigcap_{j=1}^{1} A_j \subseteq \bigcap_{j=1}^{1} B_j$. *Passo de indução:* Suponha válida a hipótese de indução de que, se $A_j \subseteq B_j$ for $j = 1, 2, \ldots, k$, então $\bigcap_{j=1}^{k} A_j \subseteq \bigcap_{j=1}^{k} B_j$. Queremos mostrar que, se $A_j \subseteq B_j$ para $j = 1, 2, \ldots, k+1$ então $\bigcap_{j=1}^{k+1} A_j \subseteq \bigcap_{j=1}^{k+1} B_j$. Seja x um elemento arbitrário de $\bigcap_{j=1}^{k+1} A_j = (\bigcap_{j=1}^{k} A_j) \cap A_{k+1}$. Como $x \in \bigcap_{j=1}^{k} A_j$, sabemos pela hipótese de indução que $x \in \bigcap_{j=1}^{k} B_j$; como $x \in A_{k+1}$, sabemos do fato dado que $A_{k+1} \subseteq B_{k+1}$ que $x \in B_{k+1}$. Portanto, $x \in (\bigcap_{j=1}^{k} B_j) \bigcap B_{k+1} = \bigcap_{j=1}^{k+1} B_j$.
18. Seja $P(n)$ a afirmação "$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)$". *Passo base*: P(1) é trivialmente verdadeira. *Passo de indução*: Suponha que P(k) seja verdadeira. Então, $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \cup A_{k+1}) \cap B = [(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) \cup A_{k+1}] \cap B = [(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) \cap B] \cup (A_{k+1} \cap B) = [(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_k \cap B)] \cup (A_{k+1} \cap B) = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_k \cap B) \cup (A_{k+1} \cap B)$.
19. Sejan P(n) a afirmação "$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}$". *Passo base*: P(1) é trivialmente verdadeira. *Passo de indução*: Suponha que P(k) seja verdadeira. Então, $\overline{\bigcup_{j=1}^{k+1} A_j} = \overline{\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) \cup A_{k+1}} = \overline{\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right)} \cap \overline{A_{k+1}} = \left(\bigcup_{j=1}^{k} \overline{A_j}\right) \cap \overline{A_{k+1}} = \bigcap_{j=1}^{k+1} \overline{A_j}$.
20. Seja P(n) a afirmação de que um conjunto com n elementos tem $n(n-1)/2$ subconjuntos de dois elementos. P(2), o caso base, é verdadeira, porque um conjunto com dois elementos tem um subconjunto com dois elementos - ou seja, ele próprio- e 2(2 - 1)/2 = 1. Agora, suponha que P(k) seja verdadeira. Seja S um conjunto com $k+1$ elementos. Escolha um elemento a em S e seja $T = S - \{a\}$. Um subconjunto de dois elementos de S ou contém a ou não. Aqueles subconjuntos que não contém a são os subconjuntos de T com dois elementos; pela hipótese de indução, existem $k(k-1)/2$ destes. Existem k subconjuntos de S com dois elementos que contêm a, porque tal subconjunto contêm a e um dos k elementos em T. Logo, existem $k(k-1)/2 + k = (k+1)k/2$ subconjuntos de dois elementos de S. Isto completa a demonstração por indução.
21. Os dois conjuntos não se superpõem quando $k = 2$, ou seja, os cavalos nestes dois conjuntos não precisam ter a mesma cor. Portanto, a afirmação P(1) $\rightarrow$ P(2) é falsa.
22. O erro está em aplicar a hipótese de indução para olhar o max$(x-1, y-1)$, porque, embora x e y sejam inteiros positivos, $x-1$ e $y-1$ não precisam ser (um ou ambos poderiam ser 1).
23. *Passo base*: Para $k = 0$, $1 \equiv 1 \text{mod}(m)$. *Passo de indução*: Suponha que $a \equiv b(\text{mod } m)$ e $a^k \equiv b^k(\text{mod } m)$; devemos mostrar que $a^{k=1} \equiv b^{k+1}(\text{mod } m)$. De acordo com um teorema visto em sala, se $a \equiv b(\text{mod } m)$ e $c \equiv d(\text{mod } m)$, então $ac \equiv bd(\text{mod } m)$. Portanto, $a.a^k \equiv b.b^k(\text{mod } m)$, o que, por definição, diz que $a^{k+1} \equiv b^{k+1}(\text{mod } m)$.

Questões adicionais:

1. Considere $P(n)$ como a proposição de que $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (n(n+1)/2)^2$ para o número inteiro positivo n.
   (a) Qual é a proposição $P(1)$?
   (b) Mostre que $P(1)$ é verdadeira, completando o passo base da demonstração.
   (c) Qual é a hipótese indutiva?
   (d) O que você precisa demonstrar no passo de indução?
   (e) Complete o passo de indução.
   (f) Explique por que esses passos mostram que esta fórmula é verdadeira sempre que n for um número inteiro positivo.
2. Demonstre que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$ sempre que n for um número inteiro positivo.
3. Demonstre que $2 - 2 \cdot 7 + 2 \cdot 7^2 - \ldots + 2(-7)^n = (1 - (-7)^{n+1})/4$ sempre que n for um número inteiro não negativo.
4. (a) Encontre uma fórmula para $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$ examinando os valores dessa expressão para pequenos valores de n.
   (b) Demonstre a fórmula que você conjecturou no item (a).
5. Demonstre que $\sum_{j=0}^{n}(-\frac{1}{2})^j = \frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3\cdot 2^n}$ sempre que n for um número inteiro não negativo.
6. Demonstre que $\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$. Para todo número inteiro positivo n.
7. Demonstre que, para todo número inteiro positivo n, $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = n(n+1)(n+2)(n+3)/4$.
8. Considere $P(n)$ como a proposição de que $n! < n^n$, em que n é um número inteiro maior que 1.
   (a) Qual é a proposição $P(2)$?
   (b) Mostre que $P(2)$ é verdadeira, completando o passo base da demonstração.
   (c) Qual é a hipótese indutiva?
   (d) O que você precisa para demonstrar o passo de indução?
   (e) Complete o passo de indução.
   (f) Explique por que esses passos mostram que a inequação é verdadeira sempre que n for um número inteiro maior que 1.
9. Demonstre que $3^n < n!$ se n for um número inteiro maior que 6.
10. Para quais números inteiros não negativos n é $n^2 \leq n!$? Demonstre sua resposta.
11. Demonstre que $1/(2n) \leq [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)]/(2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2n)$ sempre que n for um número inteiro positivo.
12. Suponha que a e b sejam números reais com $0 < b < a$. Demonstre que se n for um número inteiro positivo,então $a^n - b^n \leq na^{n-1}(a-b)$.
13. Demonstre que $n^2 - 7n + 12$ é não negativo sempre que n for um número inteiro com $n \geq 3$.

    No exercício abaixo, H_n indica o n-ésimo número harmônico.
14. Demonstre que $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = (n+1)H_n - n$.
15. Demonstre que 3 divide $n^3 + 2n$ sempre que n for um número inteiro positivo.
16. Demonstre que 6 divide $n^3 - n$ sempre que n for um número inteiro não negativo.
17. Demonstre que 21 divide $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ sempre que n for um número inteiro positivo.
18. Demonstre que, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forem conjuntos, tal que $A_j \subseteq B_j$ para $j = 1, 2, \ldots, n$, então $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_j$
19. Demonstre que, se A_1, A_2, ..., A_n e B forem conjuntos, então
    $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \cup B =$
    $(A_1 \cup B) \cap (A_2 \cup B) \cap \ldots \cap (A_n \cup B)$.
20. Demonstre que, se A_1, A_2, ..., A_n e B forem conjuntos, então
    $(A_1 - B) \cap (A_2 - B) \cap \ldots \cap (A_n - B)$
    $= (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) - B$.
21. Demonstre que, se A_1, A_2, ..., A_n e B forem conjuntos, então
    $(A_1 - B) \cup (A_2 - B) \cup \ldots \cup (A_n - B)$
    $= (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) - B$.
22. Demonstre que um conjunto com n elementos tem $n\ (n-1)(n-2)/6$ subconjuntos com três elementos sempre que n for um número inteiro maior que ou igual a 3.
23. O que está errado nesta "demonstração"?
    Teorema: Para todo número inteiro positivo n, $\sum_{i=1}^{n} i = (n+1/2)^2/2$.
    Então, $\sum_{i=1}^{n+1} i = (\sum_{i=1}^{n} i) + (n+1)$. Pela hipótese indutiva, $\sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1/2)^2/2 + n + 1 = (n^2 + n + 1/4)/2 + n + 1 = (n^2 + 3n + 9/4)/2 = (n + 3/2)^2/2 = [(n+1) + 1/2]^2/2$, completando o passo de indução.
24. Use a indução matemática para mostrar que um conjunto de $n+1$ números inteiros positivos, não excedentes a $2n$, há pelo menos um número inteiro que divide outro número inteiro do conjunto.
25. Use a indução matemática para mostrar que $\neg(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n)$ é equivalente a $\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \ldots \wedge \neg p_n$ sempre que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ forem proposições.
26. Mostre que n retas separam o plano em $(n^2 + n + 2)/2$ regiões, considerando que nenhuma dessas duas retas são paralelas e que nenhuma dessas três retas passam por um ponto comum.
27. Use a indução matemática para demonstrar o Lema 2 da seção 3.6, que estabelece que se P é um número primo e $p|a_1a_2 \ldots a_n$, e que a_i é um número inteiro para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, então $p|a_i$ para algum número inteiro i.
28. Use a propriedade da boa ordenação para mostrar que a seguinte forma de indução matemática é um método de demonstração válido: $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos n.

    Passo Base: $P(1)$ e $P(2)$ são verdadeiras **Passo Indutivo**: Para cada número inteiro positivo k, se $P(k)$ e $P(k+1)$ forem verdadeiras, então $P(k+2)$ é verdadeira.
29. Um convidado em uma festa é uma **celebridade** se essa pessoa for conhecida por todos os outros convidados, mas não conhecer nenhum deles. Existe no máximo uma celebridade em uma festa, pois, se tiverem duas, elas deveriam conhecer uma a outra. Determinada festa não pode ter celebridades. Sua tarefa é encontrar a celebridade, se ela existir, levantando apenas um tipo de questão-perguntado aos convidados se eles conhecem um segundo convidado. Todos devem responder a questão sem mentir, ou seja, se Alice e Bob forem duas pessoas na festa, você pode perguntar a Alice se ela conhece Bob, e ela deve dizer a verdade. Use a indução matemática para mostrar que se existirem n pessoas na festa, então você pode encontrar a celebridade, se houver uma, com $3(n-1)$ perguntas. [Dica: Primeiro faça um questão para eliminar uma pessoa como celebridade. Então, use a hipótese indutiva para indentificar uma celebridade em potencial. Por fim, faça mais duas questões para determinar se aquela pessoa é realmente uma celebridade.]
30. Use a indução matemática para demonstrar que $G(n) \leq 2n-4$ para $n \geq 4$. [Dica: No passo de indução, coloque uma nova pessoa que liga para determinada pessoa no começo e no final.]
31. * Mostre que é possível organizar os números $1, 2, \ldots, n$ em uma linha para que a média de dois desses números nunca apareça entre eles. [Dica: Mostre que é suficiente demonstrar esse fato quando n é uma potência de 2. Então, use a indução matemática para demonstrar o resultado quando n for uma potência de 2.]

    Ás vezes não podemos usar a indução matemática para demonstrar um resultado que acreditamos ser verdadeiro, mas podemos usá-la para demonstrar um resultado mais forte. Como a hipótese indutiva de um resultado mais forte fornece mais do que trabalhar com ele, esse processo é chamado de **carga indutiva**. Podemos usar a carga indutiva no Exercício 35.
32. Suponha que queiramos demonstrar que
    $1/2 * 3/4 \ldots (2n-1)/2n < 1/\sqrt{3n}$
    para todos os números inteiros positivos n.
    (a) Mostre que, se tentarmos demonstrar esta inequação usando a indução matemátia, o passo base será válido, mas o de indução não.
    (b) Mostre que a indução matemátia pode ser utilizada para demonstrar a inequação forte

        $\frac{1}{2} * \frac{3}{4} \ldots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$
        para todos os números inteiros maiores que 1, que, junto com a verificação do caso em que n=1, estabelece a inequação mais fraca que originalmente tentamos demonstrar usando a indução matemática.
33. Ladrilhe com trinominós à direita um tabuleiro de damas 4x4 com quadrado removido na parte superior esquerda.
34. Demonstre ou negue que todos os tabuleiros de damas nos tamanhos a seguir podem ser completamente preenchidos com trinominós à direita sempre que n for um número inteiro positivo.
    (a) 3×2^n
    (b) 6×2^n
    (c) $3^n \times 3^n$
    (d) $6^n \times 6^n$
35. Mostre que um tabuleiro de damas $n \times n$ com um quadrado removido pode ser completamente preenchido com triominós, se $n > 5$, n for ímpar entãonão há divisão de 3 (Não divide) n.
36. Encontre um tabuleiro de damas 5×5 com esse quadrado removido que não pode ser ladrilhado com trinominós. Demonstre que esse preenchimento não existe para esse tipo de tabuleiro.