Matemática Discreta

Sequências e Somatórios

1. Encontre os termos abaixo da sequência $\{a_n\}$, em que $a_n = 2.(-3)^n + 5^n$.
   (a) a_0 (b) a_1 (c) a_4 (d) a_5
2. Quais são os termos a_0, a_1, a_2 e a_3 da sequência $\{a_n\}$, em que a_n é igual a
   (a) $2^n + 1$?
   (b) $(n+1)^{n+1}$
   (c) $\lfloor n/2 \rfloor$?
   (d) $\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil$?
3. Liste os primeiros 10 termos de cada uma das sequências abaixo.
   (a) a sequência que começa com 2 e na qual cada termo sucessivo é o termo anterior acrescido de 3 unidades
   (b) a sequência que lista cada número inteiro positivo três vezes, em ordem crescente
   (c) a sequência que apresenta os números inteiros positivos e ímpares em ordem crescente, listando cada número inteiro ímpar duas vezes
   (d) a sequência cujo n-ésimo termo é $n! - 2^n$
   (e) a sequência que começa com 3, na qual cada termo subsequente é duas vezes o termo anterior
   (f) a sequência cujos dois primeiros termos são 1 e cada termo subsequente é a soma dos dois termos anteriores (Esta é a famosa sequência Fibonacci, que estudaremos mais a frente no texto.)
   (g) a sequência cujo n-ésimo termo é o número de bits na expansão binária do número n(definida na Seção 3.6)
   (h) a sequência em que o n-ésimo termo é o número de letras da palavra em inglês para o índice n
4. Encontre pelo menos três sequências diferentes começando com os termos 1, 2, 4, em que os termos são construídos a partir de uma fórmula ou regra simples.
5. Para cada uma das listas de números inteiros, forneça uma fórmula ou regra simples para construir os termos de uma sequência de interios que comece com a lista dada. Assumindo que sua fórmula esteja correta, determine os três próximos termos da sequência.
   (a) 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1,...
   (b) 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8,...
   (c) 1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0,...
   (d) 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192,...
   (e) 15, 8, 1, -6, -13, -20, -27,...
   (f) 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, 47,...
   (g) 2, 16, 54, 128, 250, 432, 686,...
   (h) 2, 3, 7, 25, 121, 721, 5041, 40321,...
6. Mostre que se a_n indica o n-ésimo número inteiro positivo que não é um quadrado perfeito, então $a_n = n + \{\sqrt{n}\}$, em que $\{x\}$ indica o número inteiro mais próximo do número real x.
7. Quais são os valores das somas abaixo?
   (a) $\sum_{k=1}^{5}(k+1)$
   (b) $\sum_{J=0}^{4}(-2)^j$
   (c) $\sum_{i=1}^{10} 3$
   (d) $\sum_{j=0}^{8}(2^{j+1} - 2^j)$
8. Qual é o valor para cada uma das somas abaixo dos termos de uma progressão geométrica?
   (a) $\sum_{j=0}^{8} 3 \cdot 2^j$
   (b) $\sum_{j=1}^{8} 2^j$
   (c) $\sum_{j=2}^{8}(-3)^j$
   (d) $\sum_{j=0}^{8} 2 \cdot (-3)^j$
9. Compute cada uma das somas duplas abaixo.
   (a) $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}(i+j)$
   (b) $\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{3}(2i+3j)$
   (c) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{2} i$
   (d) $\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=1}^{3} ij$
10. Mostre que $\sum_{j=1}^{n}(a_j - a_{j-1}) = a_n - a_0$ em que $a_0, a_1, \ldots, a_n$ é uma sequência de números reais. Esse tipo de soma é chamada de **telescópica**.
11. Some os dois lados da identidade $k^2 - (k-1)^2 = 2k - 1$ de $k = 1$a $k = n$ e use o Exercício 19 para encontrar
    (a) uma fórmula para $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ (a soma dos primeiros n números naturais ímpares).
    (b) uma fórmula para $\sum_{k=1}^{n} k$.
12. Encontre $\sum_{k=100}^{200} k$. (Use a Tabela 2).
13. Encontre uma fórmula para $\sum_{k=0}^{m} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$, quando m é um número inteiro positivo.
14. Quais são os valores dos produtos abaixo?
    (a) $\prod_{i=0}^{10} i$
    (b) $\prod_{i=5}^{8} i$
    (c) $\prod_{i=1}^{100}(-1)^i$
    (d) $\prod_{i=1}^{10} 2$

Lembre-se que o valor da função fatorial de um número inteiro positivo n, indicado por n!, é o produto dos números inteiros positivos de 1 a n. Lembrando também que 0! = 1.

15. Encontre $\sum_{j=0}^{4} j!$.

Respostas:

1. (a) 3 (b) -1 (c) 787 (d) 2639
2. (a) $a_0 = 2, a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 9$
   (b) $a_0 = 1, a_1 = 4, a_2 = 27, a_3 = 256$
   (c) $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1$
   (d) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$
3.
   (a) 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26 e 29
   (b) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4
   (c) 1, 1, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 9, 9
   (d) -1, -2, -2, 8, 88, 656, 4912, 40064, 362368, 3627776
   (e) 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 1536
   (f) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55
   (g) 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4
   (h) 3, 3, 5, 4, 4, 3, 5, 5, 4, 3
4. Cada termo pode ser duas vezes o termo anterior; n-ésimo termo poderia ser obtido a partir do termo anterior somando $n - 1$; os termos poderiam ser inteiros positivos que não são múltiplos de 3; existem infinitas outras possibilidades.
5.
   (a) Um 1 e um 0, seguidos por dois 1s e dois 0s, seguidos por três 1s e três 0s, e assim por diante; 1, 1, 1
   (b) Os inteiros positivos estão listados em ordem crescente com cada inteiro positivo par listado duas vezes; 9, 10, 10.
   (c) Os termos em posição com numeração ímpar são as potências sucessivas de 2; os termos nas posições com numeração par são todos 0; 32, 0, 64.
   (d) $a_n = 3 * 2^{n-1}; 384, 768, 1536$
   (e) $a_n = 15 - 7(n-1) = 22 - 7n; -34, -41, -48$
   (f) $a_n = (n^2 + n + 4)/2; 57, 68, 80$
   (g) $a_n = 2n^3; 1024, 1458, 2000$
   (h) $a^n = n! + 1; 36281, 3628801, 39916801$
6. Entre os inteiros 1, 2,...,a_n, em que a_n é o n-ésimo inteiro positivo que não é um quadrado perfeito, os não quadrados são $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e os quadrados são $1^2, 2^2, \ldots, k^2$, em que k é o inteiro com $k^2 < n + k < (k+1)^2$. Consequentemente, $a_n = n + k$, em que $k^2 < a_n < (k+1)^2$. Para encontrar k, observe primeiro que $k^2 < n + k < (k+1)^2$, de modo que $k^2 + 1 \leq n + k \leq (k+1)^2 - 1$. Portanto, $(k - 1/2)^2 + 3/4 = k^2 - k + 1 \leq n \leq k^2 + k = (k + 1/2)^2 - 1/4$. Segue que $k - 1/2 < \sqrt{n} < k + 1/2$, de modo que $k = \{\sqrt{n}\}$ e $a_n = n + k = n + \{\sqrt{n}\}$.
7. (a) 20 (b) 11 (c) 30 (d) 511
8. (a) 1533 (b) 510 (c) 4923 (d) 9842
9. (a) 21 (b) 78 (c) 18 (d) 18
10. $\sum_{j=1}^{n}(a_j - a_{j-1}) = a_n - a_0$
11. (a) n^2 (b) $n(n+1)/2$
12. 15150
13. $n(n+1)(2n+1)/3 + n(n+1)/2 + (n+1)(m - (n+1)^2 + 1)$, em que $n = \lfloor \sqrt{m} \rfloor - 1$
14. (a) 0 (b) 1680 (c) 1 (d) 1024
15. 34