Matemática Básica

Equivalências Lógicas

1. Use as leis de De Morgan para encontrar a negação de cada uma das proposições abaixo.

   (a) Jan é rica e feliz.
   (b) Carlos andará de bicicleta ou correrá amanhã.
   (c) Mei anda ou pega o ônibus para ir à escola.
   (d) Ibrahim é esperto e trabalha muito.

2. Mostre que cada uma das proposições condicionais a seguir é uma tautologia, usando a tabela-verdade.

   (a) $(p \wedge q) \to p$
   (b) $p \to (p \vee q)$
   (c) $\neg p \to (p \to q)$
   (d) $(p \wedge q) \to (p \to q)$
   (e) $\neg(p \to q) \to p$
   (f) $\neg(p \to q) \to \neg q$

3. Argumente que cada uma das proposições condicionais do exercício anterior é uma tautologia, sem usar a tabela-verdade. Em seguida, use uma sequência de equivalências lógicas para demonstrar estas tautologias.
4. Determine se $(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$ é uma tautologia.
5. Mostre que a negação da implicação $\neg(p \to q)$ é equivalente a $p \wedge \neg q$.
6. As proposições abaixo apresentam uma pequena diferença em relação à propriedade da absorção (uma das repetições de p está negada). Forneça uma sequência de equivalências lógicas para demonstrar estas equivalências.

   (a) $p \wedge (\neg p \vee q) \equiv p \wedge q$
   (b) $p \vee (\neg p \wedge q) \equiv p \vee q$

7. Mostre que as afirmações abaixo são verdadeiras. Para mostrar que duas proposições são equivalentes, argumente que para toda combinação de valores para as variáveis proposicionais, ou ambas são verdadeiras ou ambas são falsas. Caso necessário, use uma tabela-verdade. Em seguida, demonstre o que se pede usando uma sequência de equivalências lógicas (exceto os itens (h) e (i)).

   (a) $\neg(p \leftrightarrow q)$ e $p \leftrightarrow \neg q$ são equivalentes.
   (b) $\neg p \leftrightarrow q$ e $p \leftrightarrow \neg q$ são equivalentes.
   (c) $\neg(p \leftrightarrow q)$ e $\neg p \leftrightarrow q$ são equivalentes.
   (d) $(p \to r) \wedge (q \to r)$ e $(p \vee q) \to r$ são equivalentes.
   (e) $(p \to r) \vee (q \to r)$ e $(p \wedge q) \to r$ são equivalentes.
   (f) $p \leftrightarrow q$ e $(p \to q) \wedge (q \to p)$ são equivalentes.
   (g) $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$ é uma tautologia.
   (h) $(p \to q) \to r$ e $p \to (q \to r)$ **NÃO** são equivalentes.
   (i) $(p \to q) \to (r \to s)$ e $(p \to r) \to (q \to s)$ **NÃO** são equivalentes.

8. Encontre uma proposição composta que envolva as variáveis proposicionais p, q, e r, que é verdadeira quando exatamente duas de p, q e r forem verdadeiras, mas o contrário é falso. **Dica:** Forme uma disjunção de conjuções. Inclua uma conjunção para cada combinação de valores para os quais a proposição é verdadeira. Cada conjunção deverá incluir cada uma dessas três variáveis ou suas negações.

   As questões a seguir utilizam a definição abaixo:
   Def: A proposição $p \mid q$ (lê-se p NAND q) é verdadeira apenas quando p ou q, ou ambas, forem falsas. A proposição $p \downarrow q$ (lê-se p NOR q) é verdadeira apenas quando p e q forem falsas.
9. Construa as tabelas-verdade de $p \mid q$ e $p \downarrow q$. Mostre que $p \mid q$ é equivalente a $\neg(p \wedge q)$, e que $p \downarrow q$ é equivalente a $\neg(p \vee q)$.
10. Mostre que o operador $\mid$ é comutativo, mas não associativo.
11. Encontre uma proposição equivalente a $p \to q$ utilizando apenas o operador $\downarrow$.
12. Reescreva a sentença a seguir, utilizando apenas disjunção e negação: "Se o banco está aberto, então o posto está fechado, se não for domingo".

Respostas:

1. (a) Jan não é rica, ou Jan não é feliz.
   (b) Carlos não andará de bicicleta amanhã, e Carlos não correrá amanhã.
   (c) Mei não anda para ir à escola, e Mei não pega o ônibus para ir à escola.
   (d) Ibrahim não é esperto, ou Ibrahim não trabalha muito.
2.

(a)

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

(b)

p	q	$p \vee q$	$p \to (p \vee q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

(c)

p	q	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \to (p \to q)$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

(d)

p	q	$p \wedge q$	$p \to q$	$(p \wedge q) \to (p \to q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

(e)

p	q	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$\neg(p \to q) \to p$
V	V	V	F	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

(f)

p	q	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$\neg q$	$\neg(p \to q) \to \neg q$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	F	V	V

3. Em cada caso mostraremos que se a hipótese for verdadeira, então a conclusão também é.

   (a) Se a hipótese $p \wedge q$ for verdadeira, então, por definição de conjunção, a conclusão p também é verdadeira.

$$
\begin{aligned}
(p \wedge q) \to p &\equiv \neg(p \wedge q) \vee p && \text{(condicional)}\\
&\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee p && \text{(De Morgan)}\\
&\equiv (p \vee \neg p) \vee \neg q && \text{(comuntativa e associativa)}\\
&\equiv V \vee \neg q && \text{(negação)}\\
&\equiv V && \text{(dominação)}
\end{aligned}
$$

   (b) Se a hipótese p for verdadeira, pela definição de disjunção, a conclusão $p \vee q$ também é verdadeira.

$$
\begin{aligned}
p \to (p \vee q) &\equiv \neg p \vee (p \vee q) && \text{(condicional)}\\
&\equiv (p \vee \neg p) \vee q && \text{(comutativa e associativa)}\\
&\equiv V \vee q && \text{(negação)}\\
&\equiv V && \text{(dominação)}
\end{aligned}
$$

   (c) Se a hipótese $\neg p$ for verdadeira, isto é, se p é falsa, então a conclusão $p \to q$ é verdadeira.

$$
\begin{aligned}
\neg p \to (p \to q) &\equiv \neg p \to (\neg p \vee q) && \text{(condicional)}\\
&\equiv \neg(\neg p) \vee (\neg p \vee q) && \text{(condicional)}\\
&\equiv p \vee (\neg p \vee q) && \text{(dupla negação)}\\
&\equiv (p \vee \neg p) \vee q && \text{(associativa)}\\
&\equiv V \vee q && \text{(negação)}\\
&\equiv V && \text{(dominação)}
\end{aligned}
$$

   (d) Se a hipótese $p \wedge q$ for verdadeira, então ambas p e q são verdadeiras, de modo que a conclusão $p \to q$ também é verdadeira.

$$
\begin{aligned}
(p \wedge q) \to (p \to q) &\equiv (p \wedge q) \to (\neg p \vee q) && \text{(condicional)}\\
&\equiv \neg(p \wedge q) \vee (\neg p \vee q) && \text{(condicional)}\\
&\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (\neg p \vee q) && \text{(De Morgan)}\\
&\equiv (\neg p \vee \neg p) \vee (q \vee \neg q) && \text{(comutativa e associativa)}\\
&\equiv \neg p \vee V && \text{(idempotente e negação)}\\
&\equiv V && \text{(dominação)}
\end{aligned}
$$

   (e) Se a hipótese $\neg(p \to q)$ for verdadeira, então $p \to q$ é falsa, de modo que a conclusão p é verdadeira (e q é falsa).

$$
\begin{aligned}
\neg(p \to q) \to p &\equiv \neg(\neg(p \to q)) \vee p && \text{(condicional)}\\
&\equiv (p \to q) \vee p && \text{(dupla negação)}\\
&\equiv (\neg p \vee q) \vee p && \text{(condicional)}\\
&\equiv (p \vee \neg p) \vee q && \text{(comutativa e associativa)}\\
&\equiv V \vee q && \text{(negação)}\\
&\equiv V && \text{(dominação)}
\end{aligned}
$$

   (f) Se a hipótese $\neg(p \to q)$ for verdadeira, então $p \to q$ é falsa, de modo que p é verdadeira e q é falsa. Portanto, a conclusão $\neg q$ é verdadeira.

$$
\begin{aligned}
\neg(p \to q) \to \neg q &\equiv \neg(\neg(p \to q)) \vee \neg q && \text{(condicional)}\\
&\equiv (p \to q) \vee \neg q && \text{(dupla negação)}\\
&\equiv (\neg p \vee q) \vee \neg q && \text{(condicional)}\\
&\equiv \neg p \vee (q \vee \neg q) && \text{(associativa)}\\
&\equiv \neg p \vee V && \text{(negação)}\\
&\equiv V && \text{(dominação)}
\end{aligned}
$$

4. É uma tautologia:

p	q	$\neg q$	$p \to q$	$\neg q \wedge (p \to q)$	$\neg p$	$(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	F	F	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

5.
$$\begin{aligned} \neg(p \to q) &\equiv \neg(\neg p \vee q) && \text{(condicional)} \\ &\equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q && \text{(De Morgan)} \\ &\equiv p \wedge \neg q && \text{(dupla negação)} \end{aligned}$$

6. (a)

$$\begin{aligned} p \wedge (\neg p \vee q) &\equiv (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) && \text{(distributiva)} \\ &\equiv F \vee (p \wedge q) && \text{(negação)} \\ &\equiv p \wedge q && \text{(elemento neutro)} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} p \vee (\neg p \wedge q) &\equiv (p \vee \neg p) \wedge (p \vee q) && \text{(distributiva)} \\ &\equiv V \wedge (p \vee q) && \text{(negação)} \\ &\equiv p \vee q && \text{(elemento neutro)} \end{aligned}$$

7. (a) Cada proposição é verdadeira exatamente quando p e q têm valores-opostos.

$$\begin{aligned} \neg(p \leftrightarrow q) &\equiv \neg((p \to q) \wedge (q \to p)) && \text{(bicondicional)} \\ &\equiv \neg(p \to q) \vee \neg(q \to p) && \text{(De Morgan)} \\ &\equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) && \text{(Questão 5)} \\ &\equiv ((p \wedge \neg q) \vee q) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee \neg p) && \text{(distributiva)} \\ &\equiv (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) && \text{(Questão 6)} \\ &\equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee p) && \text{(comutativa)} \\ &\equiv (p \to \neg q) \wedge (\neg q \to p) && \text{(condicional)} \\ &\equiv p \leftrightarrow \neg q && \text{(bicondicional)} \end{aligned}$$

(b) A proposição $\neg p \leftrightarrow q$ é verdadeira quando $\neg p$ e q têm os mesmos valores-verdade, o que significa que p e q tem valores-verdade diferentes. Analogamente, $p \leftrightarrow \neg q$ é verdadeira exatamente nos mesmos casos. Portanto essas duas expressões são logicamente equivalentes.

$$\begin{aligned} \neg p \leftrightarrow q &\equiv (\neg p \to q) \wedge (q \to \neg p) && \text{(bicondicional)} \\ &\equiv (\neg q \to p) \wedge (p \to \neg q) && \text{(contrapositiva)} \\ &\equiv p \leftrightarrow \neg q && \text{(comutativa e bicondicional)} \end{aligned}$$

(c) A proposição $\neg(p \leftrightarrow q)$ é verdadeira quando $p \leftrightarrow q$ for falsa, o que significa que p e q têm valores-verdade diferentes. Como isso ocorre precisamente quando $\neg p \leftrightarrow q$ for verdadeira, as duas expressões são logicamente equivalentes.

$$\begin{aligned} \neg(p \leftrightarrow q) &\equiv (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) && \text{(Item (a))} \\ &\equiv (\neg p \to q) \wedge (q \to \neg p) && \text{(condicional)} \\ &\equiv \neg p \leftrightarrow q && \text{(bicondicional)} \end{aligned}$$

(d) Para $(p \to r) \wedge (q \to r)$ ser falsa, uma das duas proposições condicionais deve ser falsa, o que ocorre exatamente quando r for falsa e, pelo menos, uma entre p e q for verdadeira. Mas estes são precisamente os casos nos quais $p \vee q$ é verdadeira e r é falsa, que é precisamente quando $(p \vee q) \to r$ for falsa. Como as duas proposições são falsas exatamente nas mesmas situações, elas são logicamente equivalentes.

$$\begin{aligned} (p \to r) \wedge (q \to r) &\equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) && \text{(condicional)} \\ &\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r && \text{(distributiva)} \\ &\equiv \neg(p \vee q) \vee r && \text{(De Morgan)} \\ &\equiv (p \vee q) \to r && \text{(condicional)} \end{aligned}$$

(e) Para $(p \to r) \vee (q \to r)$ ser falsa, as duas proposições condicionais devem ser falsas, o que ocorre exatamente quando r for falsa e ambas p e q forem verdadeiras. Mas este é precisamente o caso em que $p \wedge q$ é verdadeira e r é falsa, que é precisamente quando $(p \wedge q) \to r$ for falsa. Como as duas proposições são falsas exatamente nas mesma situações, elas são logicamentes equivalentes.

$$\begin{aligned} (p \to r) \vee (q \to r) &\equiv (\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee r) && \text{(condicional)} \\ &\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (r \vee r) && \text{(comut. e assoc.)} \\ &\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee r && \text{(idempotente)} \\ &\equiv \neg(p \wedge q) \vee r && \text{(De Morgan)} \\ &\equiv (p \wedge q) \to r && \text{(condicional)} \end{aligned}$$

(f) Esta é a definição da bicondicional. Cada uma delas é verdadeira precisamente quando p e q tiverem os mesmo valores-verdade.

(g) Como a última coluna é toda de Vs, temos que esta propriedade (transitividade da implicação) é uma tautologia:

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$	$p \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to p) \to (p \to r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

$(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$

$$\begin{aligned} &\equiv \neg[(p \to q) \wedge (q \to r)] \vee (p \to r) && \text{(condicional)} \\ &\equiv \neg(p \to q) \vee \neg(q \to r) \vee (p \to r) && \text{(De Morgan)} \\ &\equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee (\neg p \vee r) && \text{(Questão 5, condicional)} \\ &\equiv [(p \wedge \neg q) \vee \neg p] \vee [(q \wedge \neg r) \vee r] && \text{(comutativa, associativa)} \\ &\equiv (\neg q \vee \neg p) \vee (q \vee r) && \text{(Questão 6)} \\ &\equiv (\neg p \vee r) \vee (q \vee \neg q) && \text{(comutativa, associativa)} \\ &\equiv (\neg p \vee r) \vee V && \text{(negação)} \\ &\equiv V && \text{(dominação)} \end{aligned}$$

(h) Basta mostrar um contraexemplo: quanto todas as variáveis são falsas, temos que $(p \to q) \to r$ é falsa, mas $p \to (q \to r)$ é verdadeira. Com isso concluímos que a condicional não tem a propriedade associativa.

(i) Temos vários contraexemplos possíveis. Se considerarmos r como verdadeira e p, q e s como falsas, então $(p \to q) \to (r \to s)$ será falsa, mas $(p \to r) \to (q \to s)$ será verdadeira.

8. $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$.

p	q	r	$p \wedge q \wedge \neg r$	$p \wedge \neg q \wedge r$	$\neg p \wedge q \wedge r$	$\vee$
V	V	V	F	F	F	F
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

9.

p	q	$p \mid q$	$\neg(p \wedge q)$	$p \downarrow q$	$\neg(p \vee q)$
V	V	F	F	F	F
V	F	V	V	F	F
F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V

10. Comutativo: $p \mid q \equiv \neg(p \wedge q) \equiv \neg(q \wedge p) \equiv q \mid p$.
Contraexemplo para a associatividade: seja p verdadeiro, q falso e r falso.
Então, $p \mid (q \mid r) \equiv \neg(p \wedge \neg(q \wedge r))$ é verdadeiro, mas $(p \mid q) \mid r \equiv \neg(\neg(p \wedge q) \wedge r)$ é falso.

11.
- Note que $p \downarrow q \equiv \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$.
- Temos também que $p \downarrow p \equiv \neg(p \vee p) \equiv \neg p$.
- Portanto, $p \to q \equiv \neg p \vee q \equiv \neg(p \wedge \neg q) \equiv \neg(\neg(\neg p) \wedge \neg q)$
$\equiv ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$.

12.
- p: banco está aberto.
- q: posto está fechado.
- r: hoje é domingo.
- Setença: $\neg r \to (p \to q)$.
$\neg r \to (p \to q) \equiv r \vee (\neg p \vee q)$.
- Reescrevendo: “Hoje é domingo OU o banco está fechado OU o posto está fechado”(inclusivo: pode ocorrer mais de um).