# Matemática Básica
# Lista de Exercícios 04

## Regras de Inferência

1. Transforme as sentenças abaixo em expressões lógicas, e determine se o argumento é válido. Ou seja, podemos inferir que a conclusão é verdadeira se as premissas forem verdadeiras? Qual foi a regra de inferência que você utilizou?

   Se Sócrates é humano, então Sócrates é mortal
   Sócrates é humano
   ________________________________________
   Sócrates é mortal

2. Qual a regra de inferência usada em cada um dos argumentos abaixo?

   (a) Alice é graduada em matemática. Por isso, Alice é graduada ou em matemática ou em ciências da computação.

   (b) Jerry é graduado em matemática e em ciência da computação. Por isso, Jerry é um graduado em matemática.

   (c) Se o dia estiver chuvoso, então a piscina estará fechada. O dia está chuvoso. Por isso, a piscina está fechada.

   (d) Se nevar hoje, a universidade estará fechada. A universidade não está fechada hoje. Por isso, não nevou hoje.

   (e) Se eu for nadar, então eu ficarei no sol por muito tempo. Se eu ficar no Sol por muito tempo, então eu me queimarei. Por isso, se eu for nadar, eu me queimarei. 5

3. Use as regras de inferência para mostrar que as hipóteses "Randy trabalha pouco", "Se Randy trabalha pouco, então ele é um garoto preguiçoso" e "Se Randy é um garoto preguiçoso, então ele não conseguirá um emprego" implica a conclusão "Randy não conseguirá o emprego".
4. Quais as regras de inferência são utilizadas no famoso argumento abaixo?
   "Todos os homens são mortais. Sócrates é um homem. Por isso, Sócrates é mortal."
5. Para cada grupo de premissas abaixo, qual conclusão ou conclusões relevantes podem ser tiradas? Explique as regras de inferência utilizadas para obter cada conclusão das premissas.

   (a) "Se eu tiro o dia de folga, chove ou neva." "Eu tirei folga na terça-feira ou na quinta-feira." "Fez sol na terça-feira." "Não nevou na quinta-feira."

   (b) "Se eu como comida apimentada, então eu tenho sonhos estranhos." "Eu tenho sonhos estranhos quando cai um trovão enquanto eu durmo." "Eu não tive sonhos estranhos."

   (c) "Eu sou esperto ou sortudo." "Eu não tenho sorte." "Se eu tivesse sorte, então eu ganharia na loteria."

   (d) "Todo mundo graduado em ciência da computação tem seu próprio computador." "Ralph não tem seu próprio computador." "Ana tem seu próprio computador."

   (e) "O que é bom para as empresas é bom para o Brasil." "O que é bom para o Brasil, é bom para você." "O que é bom para as empresas é você comprar muitas coisas."

   (f) "Todos os roedores roem sua própria comida." "Ratos são roedores." "Coelhos não roem sua comida." "Morcegos não são roedores."

6. Mostre que o argumento com as premissas $p_1, p_2, \dots, p_n$ e a conclusão $q \to r$ é válido se o argumento com as premissas $p_1, p_2, \dots, p_n, q$ e a conclusão $r$ é válido.
7. Para cada argumento a seguir, aponte quais regras de inferência foram utilizadas em cada passo.

   (a) "Doug, um estudante dessa sala, sabe como escrever programas em Java. Todos que sabem como escrever programas em Java conseguem um emprego bem remunerado. Por isso, alguém nesta sala pode conseguir um emprego bem remunerado."

   (b) "Alguém nesta sala gosta de ver baleias. Toda pessoa que gosta de ver baleias se preocupa com a poluição no mar. Por isso há uma pessoa na sala que se preocupa com a poluição marinha."

   (c) "Cada um dos 93 estudantes nesta sala possuem o seu próprio computador. Todos que possuem seu próprio computador podem usar um programa de processamento de palavras. Por isso, Zeke, um estudante da sala, pode usar um programa de processamento."

   (d) "Todos em Nova Jersey moram a 50 milhas do oceano. Alguém que mora em Nova Jersey nunca viu o oceano. Por isso alguém que mora a 50 milhas do oceano nunca o viu."

8. Determine se cada um dos argumentos abaixo é correto ou incorreto e justifique.

   (a) "Todos os estudantes nesta sala entendem lógica. Xavier é um estudante desta sala. Por isso, Xavier entende lógica."
   (b) "Todo graduando em ciência da computação faz matemática discreta. Natasha está fazendo matemática dicreta. Por isso, Natasha é uma graduanda em ciência da computação."
   (c) "Todos os papagaios gostam de frutas. Meu passarinho de estimação não é um papagaio. Por isso, meu passarinho de estimação não gosta de frutas."
   (d) "Todos que comem granola todo dia são saudáveis. Linda não é saudável. Por isso, Linda não come granola todos os dias."

9. O que está errado neste argumento? Considere $H(x)$ como "$x$ é feliz". Dada a premissa $\exists x H(x)$, concluímos que $H(\text{Lola})$. Por isso, Lola é feliz.
10. Determine se cada um dos argumentos abaixo é válido. Se um argumento estiver correto, qual regra de inferência foi utilizada? Senão, quais erros lógicos foram cometidos?

    (a) Se $n$ é um número real tal que $n > 1$, então $n^2 > 1$. Suponha que $n^2 > 1$. Então $n > 1$.
    (b) Se $n$ é um número real com $n > 3$, então $n^2 > 9$. Suponha que $n^2 \leq 9$. Então $n \leq 3$.
    (c) Se $n$ é um número real com $n > 2$, então $n^2 > 4$. Suponha que $n \leq 2$. Então $n^2 \leq 4$.

11. Identifique o(s) erro(s) neste argumento que suspostamente mostra(m) que se $\exists x P(x) \wedge \exists v Q(x)$ é verdadeira, então $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$ é verdadeira.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ | Premissa |
| 2 | $\exists x P(x)$ | Simplificação de (1) |
| 3 | $P(c)$ | Instanciação de (2) |
| 4 | $\exists x Q(x)$ | Simplificação de (1) |
| 5 | $Q(c)$ | Instanciação Existencial de (4) |
| 6 | $P(c) \wedge Q(c)$ | Conjunção de (3) e (5) |
| 7 | $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$ | Generalização Existencial |

12. Justifique a regra *universal de modus tollens* mostrando que as premissas $\forall x (P(x) \to Q(x))$ e $\neg Q(a)$ para um elemento em particular $a$ no domínio, implica $\neg P(a)$.
13. Use as regras de inferência para mostrar que se $\forall x (P(x) \to (Q(x) \wedge S(x)))$ e $\forall x (P(x) \wedge R(x))$ são verdadeiras, então $\forall x (R(x) \wedge S(x))$ é verdadeira.
14. Use as regras de inferência para mostrar que se $\forall x (P(x) \vee Q(x))$, $\forall x (\neg Q(x) \vee S(x))$, $\forall x (R(x) \to \neg S(x))$, $\exists x \neg P(x)$ são verdadeiras, então $\exists x \neg R(x)$ é verdadeira.
15. Use a resolução para mostrar que as hipóteses "não está chovendo ou Ivete tem uma sombrinha", "Ivete não tem uma sombrinha ou ela não se molha" e "está chovendo ou Ivete não se molha" implica que "Ivete não se molha".
16. Use a resolução para mostrar que a proposição composta $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ é uma contradição (ou seja, a conclusão do argumento é o valor falso).
17. Mostre que o argumento a seguir é válido. "Se o super-homem é capaz e deseja prevenir o crime, então ele previne o crime. Se o super-homem não é capaz de prevenir o crime, ele é impotente. Se ele não deseja prevenir o crime, ele é mal. O super-homem não previne o crime (basta assistir o jornal para concluir isso). Se o super-homem existe, ele não é impotente nem mal. Portanto, o super-homem não existe".

## Respostas:

1. O argumento é válido, usando a regra modus ponens.
2. (a) Adição (b) Simplificação (c) Modus ponens (d) Modus tollens (e) Silogismo hipotético
3. Seja $w$ "Randy trabalha pouco", seja $d$ "Randy é um garoto preguiçoso," e seja $j$ "Randy conseguirá o emprego". As hipóteses são $w$, $w \to d$ e $d \to \neg j$. Usando modus ponens e as primeiras duas hipóteses, segue $d$. Usando modus ponens e a última hipótese, segue $\neg\, j$, "Randy não conseguirá o emprego", que é a conclusão desejada.
4. Instanciação universal é utilizada para concluir que "Se Sócrates for um homem, então Sócrates é mortal". Modus ponens é então usado para concluir que Sócrates é mortal.
5. (a) $f$: tirei folga, $c$: choveu, $n$: nevou, $t$: terça, $q$: quinta.
   Premissas: $f \to (c \vee n) \equiv \neg f \vee c \vee n$, $f \to (t \vee q) \equiv \neg f \vee t \vee q$, $t \to \neg(c \vee n) \equiv (c \vee n) \to \neg t$, $q \to \neg n \equiv \neg q \vee \neg n$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\begin{array}{c} f \to (c \vee n) \\ (c \vee n) \to \neg t \\ \hline f \to \neg t \end{array}$ | $\begin{array}{c} \neg f \vee \neg t \\ \neg f \vee t \vee q \\ \hline \neg f \vee q \equiv f \to q \end{array}$ | $\begin{array}{c} \neg f \vee q \\ \neg q \vee \neg n \\ \hline \neg f \vee \neg n \end{array}$ | $\begin{array}{c} \neg f \vee \neg n \\ \neg f \vee c \vee n \\ \hline \neg f \vee c \equiv f \to c \end{array}$ |

   As conclusões válidas são "eu não tirei folga na terça", "eu tirei folga na quinta", "choveu na quinta".

   (b) $a$: comida apimentada, $e$: sonhos estranhos, $t$: trovão enquanto durmo.
   Premissas: $a \to e \equiv \neg e \to \neg a$, $t \to e \equiv \neg e \to \neg t$, $\neg e$.

| | | |
|---|---|---|
| $\begin{array}{l} \neg e \to \neg a \\ \neg e \\ \hline \quad \neg a \end{array}$ | $\begin{array}{l} \neg e \to \neg t \\ \neg e \\ \hline \quad \neg t \end{array}$ | $\begin{array}{c} \neg a \\ \neg t \\ \hline \neg a \wedge \neg t \end{array}$ |

   "Eu não comi comida apimentada e não trovejou enquanto eu dormia" é uma conclusão válida.

   (c) $e$: sou esperto, $s$: tenho sorte, $\ell$: ganho na loto.
   Premissas: $e \vee s, \neg s, s \to \ell$.

   $\begin{array}{c} e \vee s \\ \neg s \\ \hline e \end{array}$ "Eu sou esperto" é uma conclusão válida.

   Não é possível saber se ganharia na loto.

   (d) $G(x)$: $x$ é graduado em CC, $C(x)$: $x$ tem computador.
   Premissas: $\forall x (G(x) \to C(x)), \neg C(\text{Ralph}), C(\text{Ana})$.

| | |
|---|---|
| $\begin{array}{c} \forall x (G(x) \to C(x)) \\ \hline G(\text{Ralph}) \to C(\text{Ralph}) \end{array}$ | $\begin{array}{l} G(\text{Ralph}) \to C(\text{Ralph}) \\ \neg C(\text{Ralph}) \\ \hline \quad \neg G(\text{Ralph}) \end{array}$ |

   "Ralph não estuda ciência da computação" é uma conclusão válida.

(e) $E(x)$: $x$ é bom para as empresas, $B(x)$: $x$ é bom para o Brasil, $V(x)$: $x$ é bom para você, $a$: você comprar muitas coisas.
Premissa: $\forall x(E(x) \to B(x)), \forall x(B(x) \to V(x)), E(a)$.

| | |
|---|---|
| $\dfrac{\forall x(E(x) \to B(x))}{E(a) \to B(a)}$ | $\dfrac{\forall x(B(x) \to V(x))}{B(a) \to V(a)}$ |

| | | |
|---|---|---|
| $\dfrac{\begin{array}{l} E(a) \to B(a) \\ E(a) \end{array}}{B(a)}$ | $\dfrac{\begin{array}{l} B(a) \to V(a) \\ B(a) \end{array}}{V(a)}$ | $\dfrac{\begin{array}{c} B(a) \\ V(a) \end{array}}{B(a) \wedge V(a)}$ |

"Que você compre muitas coisas é bom para o Brasil e é bom para você" é uma conclusão válida.

(f) $R(x)$: $x$ é roedor, $C(x)$: $x$ roe sua própria comida.
Premissas: $\forall x(R(x) \to C(x))$, $R(\text{ratos})$, $\neg C(\text{coelhos})$, $\neg R(\text{morcego})$.

| | |
|---|---|
| $\dfrac{\forall x(R(x) \to C(x))}{R(\text{ratos}) \to C(\text{ratos})}$ | $\dfrac{\forall x(R(x) \to C(x))}{R(\text{coelhos}) \to C(\text{coelhos})}$ |

| | | |
|---|---|---|
| $\dfrac{\begin{array}{l} R(\text{ratos}) \to C(\text{ratos}) \\ R(\text{ratos}) \end{array}}{C(\text{ratos})}$ | $\dfrac{\begin{array}{l} R(\text{coelhos}) \to C(\text{coelhos}) \\ \neg C(\text{coelhos}) \end{array}}{\neg R(\text{coelhos})}$ | $\dfrac{\begin{array}{r} C(\text{ratos}) \\ \neg R(\text{coelhos}) \end{array}}{C(\text{ratos}) \wedge \neg R(\text{coelhos})}$ |

"Ratos roem sua própria comida e coelhos não são roedores" é uma conclusão válida.

6. Suponha que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sejam verdadeiras. Queremos estabelecer que $q \to r$ é verdadeira. Se $q$ for falsa, então acabamos, trivialmente. Caso contrário, se $q$ for verdadeira, então, pela validade da forma do argumento dado (que sempre que $p_1, p_2, \ldots, p_n, q$ forem verdadeiras, então $r$ deve ser verdadeira), sabemos que $r$ é verdadeira.

   Podemos também chegar nesta conclusão através de equivalências:

$$
\begin{aligned}
(p_1 \wedge \cdots p_n) \to (q \to r) &\equiv \neg(p_1 \wedge \cdots \wedge p_n) \vee (\neg q \vee r) \\
&\equiv (\neg p_1 \vee \cdots \vee \neg p_n) \vee (\neg q \vee r) \\
&\equiv (\neg p_1 \vee \cdots \vee \neg p_n \vee \neg q) \vee r \\
&\equiv \neg(p_1 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge q) \vee r \\
&\equiv (p_1 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge q) \to r \\
&\equiv V \quad \text{(tautologia)}
\end{aligned}
$$

7. (a) $S(x)$: "$x$ está na sala de aula", $J(x)$: "$x$ sabe como escrever programas em JAVA", $E(x)$: "$x$ pode conseguir um emprego bem remunerado". As premissas são $S(\text{Doug})$, $J(\text{Doug})$, $\forall x(J(x) \to E(x))$. Usando instanciação universal e a última premissa, segue que $J(\text{Doug}) \to E(\text{Doug})$. Aplicando modus ponens a esta conclusão e à segunda premissa, segue $E(\text{Doug})$. Usando conjunção e a primeira premissa, segue $S(\text{Doug}) \wedge J(\text{Doug})$. Finalmente, concluímos $\exists x(S(x) \wedge J(x))$ usando generalização existencial.

   (b) $S(x)$: "$x$ está na sala,", $B(x)$: "$x$ gosta de ver baleias" e $P(x)$: "$x$ se preocupa com a poluição no mar". As premissas são $\exists x(S(x) \wedge B(x)$ e $\forall x(B(x) \to P(x))$. A partir da primeira premissa, $S(a) \wedge B(a)$ para uma pessoa particular $a$, usando instanciação existencial. Usando simplificação, segue que $B(a)$. Usando a segunda premissa e instanciação universal, segue $B(a) \to P(a)$. Usando modus ponens, segue $P(a)$ e, por conjunção, segue $S(a) \wedge P(a)$. Finalmente, por generalização existencial, segue a conclusão desejada $\exists x(S(x) \wedge P(x))$.

   (c) $S(x)$: "$x$ está na sala", $C(x)$: "$x$ possui um computador" e $P(x)$: "$x$ pode usar programa de processamento de palavras". As premissas são $S(\text{Zeke}), \forall x(S(x) \to C(x))$ e $\forall x(C(x) \to P(x))$. Usando a segunda premissa e instanciação universal, segue $S(\text{Zeke}) \to C(\text{Zeke})$. Usando a primeira premissa e modus ponens, segue $C(\text{Zeke})$. Usando a terceira premissa e instanciação universal, segue $C(\text{Zeke}) \to P(\text{Zeke})$. Finalmente, usando modus ponens, segue $P(\text{Zeke})$, a conclusão desejada.

   (d) $N(x)$: "$x$ mora em Nova Jersey", $M(x)$: "$x$ mora a 50 milhas do oceano" e $V(x)$: "$x$ já viu o oceano". As premissas são $\forall x(N(x) \to M(x))$ e $\exists x(N(x) \wedge \neg V(x))$. A segunda hipótese e instanciação existencial implicam que $N(a) \wedge \neg V(a)$ para uma pessoa particular $a$. Por simplificação, $N(a)$ para esta pessoa $a$. Usando instanciação universal na primeira premissa temos $N(a) \to M(a)$, e por modus ponens segue $M(a)$. Por simplificação, $\neg V(a)$ segue de $N(a) \wedge \neg V(a)$. Assim, $N(a) \wedge \neg V(a)$ segue por conjunção. Finalmente, a conclusão desejada, $\exists x(N(x) \wedge \neg V(x))$, segue por generalização existencial.

8. (a) Correto, usando instanciação universal e *modus ponens*.
   (b) Inválido; falácia de afirmar a conclusão.
   (c) Inválido; falácia de negar a hipótese.
   (d) Correto, usando instanciação universal e *modus tollens*.

9. Sabemos que existe *algum x* que torna *H*(*x*) verdadeiro, mas não podemos concluir que Lola é tal *x*.

10. (a) Falácia de afirmar a conclusão.
    (b) Argumento válido usando *modus tollens*.
    (c) Falácia de negar a hipótese.

11. O erro ocorre no passo (5), pois não podemos supor que o $c$ que torna $P$ verdadeira é o mesmo que torna $Q$ verdadeira.

12. Nos foram dadas as premissas $\forall x(P(x) \to Q(x))$ e $\neg Q(a)$ . Queremos mostrar que $\neg P(a)$. Suponha, pelo contrário, que $\neg P(a)$ não seja verdadeira. Então, P(a) é verdadeira. Portanto, pelo modus ponens universal, temos $Q(a)$. Isso contradiz a premissa dada $\neg Q(a)$. Portanto, nossa hipótese deve estar errada, e assim $\neg P(a)$ é verdadeira, como desejado.
    Podemos chegar ao mesmo resultado usando a instanciação universal na primeira premissa para obter $P(a) \to Q(a)$. Aplicando então o modus tollens juntamente com a premissa $\neg Q(a)$, obtemos $P(a)$.

13.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\forall x(P(x) \wedge R(x))$ | Premissa |
| 2 | $P(a) \wedge R(a)$, para um $a$ arbitrário | Instanciação universal a partir de (1) |
| 3 | $P(a)$ | Simplificação a partir de (2) |
| 4 | $\forall x(P(x) \to (Q(x) \wedge S(x)))$ | Premissa |
| 5 | $Q(a) \wedge S(a)$ | Modus ponens universal a partir de (3) e (4) |
| 6 | $S(a)$ | Simplificação a partir de (5) |
| 7 | $R(a)$ | Simplificação a partir de (2) |
| 8 | $R(a) \wedge S(a)$ | Conjunção a partir de (7) e (6) |
| 9 | $\forall x(R(x) \wedge S(x))$ | Generalização universal a partir de (5) |

14.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\exists x \neg P(x)$ | Premissa |
| 2 | $\neg P(c)$ | Instanciação existecial a partir de (1) |
| 3 | $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ | Premissa |
| 4 | $P(c) \vee Q(c)$ | Instanciação universal a partir de (3) |
| 5 | $Q(c)$ | Silogismo disjuntivo a partir de (4) e (2) |
| 6 | $\forall x(\neg Q(x) \vee S(x))$ | Premissa |
| 7 | $\neg Q(c) \vee S(c)$ | Instanciação universal a partir de (6) |
| 8 | $S(c)$ | Silogismo disjuntivo a partir de (5) e (7) |
| 9 | $\forall x(R(x) \to \neg S(x))$ | Premissa |
| 10 | $R(c) \to \neg S(c)$ | Instanciação universal a partir de (9) |
| 11 | $\neg R(c)$ | Modus tollens apartir de (8) e (10) |
| 12 | $\exists x \neg R(x)$ | Generalização existencial a partir de (11) |

15. $p$: "está chovendo"; $q$: "Ivete tem uma sombrinha"; $r$: "Ivete se molha". As hipóteses são $\neg p \vee q, \neg q \vee \neg r$, e $p \vee \neg r$. A resolução das duas primeiras dá $\neg p \vee \neg r$. A resolução desta e da terceira hipótese dá $\neg r$, como desejado.

16. Observe que temos uma conjunção de disjunções. Assuma que cada disjunção é uma premissa. Usar a resolução nas primeiras duas premissas nos permite concluir que $q \vee q$ é verdadeira; em outras palavras, sabemos que $q$ tem de ser verdadeira. Usar a resolução nas duas últimas premissas nos permite concluir $\neg q \vee \neg q$; em outras palavras, sabemos que $\neg q$ deve ser verdadeira. Portanto, partindo das premissas podemos concluir $q \wedge \neg q$, que é uma contradição.

17. O argumento é válido.
    $c$: capaz de prevenir o crime, $d$: deseja prevenir o crime, $p$: previne o crime, $i$: impotente, $m$: é mal, $e$: existe.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $(c \wedge d) \to p$ | premissa |
| 2 | $\neg c \to i \equiv c \vee i$ | premissa |
| 3 | $\neg d \to m \equiv d \vee m$ | premissa |
| 4 | $\neg p$ | premissa |
| 5 | $e \to (\neg i \wedge \neg m) \equiv (i \vee m) \to \neg e$ | premissa |
| 6 | $\neg(c \wedge d) \equiv \neg c \vee \neg d$ | modus tollens de (1) e (4) |
| 7 | $i \vee \neg d$ | resolução de (2) e (6) |
| 8 | $i \vee m$ | resolução de (7) e (3) |
| 9 | $\neg e$ | modus ponens de (5) e (8) |