Matemática Discreta
Lista de Exercícios 01

Técnicas de Demonstração (parte I)

1. Use uma demonstração direta para mostrar que a soma de dois números inteiros ímpares é par.
2. Mostre que o quadrado de um número par é um número par, usando a demonstração direta.
3. Demonstre que se $m+n$ e $n+p$ são números inteiros pares, em que m, n e p são números inteiros, então $m+p$ é par. Que tipo de demonstração você utilizou?
4. Use uma demonstração direta para mostrar que todo número inteiro ímpar é a diferença de dois quadrados.
5. Use uma demonstração por contradição para provar que a soma de um número irracional e um racional é irracional.
6. Demonstre ou contrarie que o produto de dois números irracionais é irracional.
7. Demonstre que se x é irracional, então $1/x$ é irracional.
8. Use uma demonstração por contraposição para mostrar que se $x+y \geq 2$, em que x e y são números reais, então $x \geq 1$ ou $y \geq 1$.
9. Mostre que se n é um número inteiro e n^3+5 é impar, então n é par, usando:

   (a) uma demonstração por contraposição.
   (b) uma demonstração por contradição.

10. Demonstre a proposição $P(0)$, em que $P(n)$ é a proposição "Se n é um número inteiro positivo maior que 1, então $n^2 > n$". Qual tipo de demonstração você utilizou?
11. Assuma $P(n)$ como a proposição "Se a e b são números reais positivos, então $(a+b)^n \geq a^n + b^n$". Comprove que $P(1)$ é verdadeira. Qual tipo de demonstração você utilizou?
12. Mostre que pelo menos 10 de quaisquer 64 dias escolhidos devem cair no mesmo dia da semana.
13. Use uma demonstração por contradição para mostrar que não há um número racional r para que $r^3+r+1=0$. [Dica: Assuma que $r=a/b$ seja uma raiz, em que a e b são números inteiros e a/b é o menor termo. Obtenha uma equação que envolva números inteiros, multiplicando-os por b^3. Então, veja se a e b são pares ou ímpares.]
14. Demonstre que se n é um número inteiro positivo, então n é ímpar se e somente se $5n+6$ for ímpar.
15. Demonstre ou contrarie que se m e n são números inteiros, tal que $mn=1$, então ou $m=1$ e $n=1$ ou $m=-1$ e $n=-1$.
16. Mostre que essas proposições sobre o número inteiro x são equivalentes: (i) $3x+2$ é par, (ii) $x+5$ é ímpar, (iii) x^2 é par.
17. Mostre que essas proposições sobre o número real x são equivalentes: (i) x é irracional, (ii) $3x+2$ é irracional, e (iii) $x/2$ é irracional.
18. Os passos abaixo para encontrar as soluções de $\sqrt{x+3}$ = 3 - x são corretos?

   (1) $\sqrt{x+3}$ = 3 - x é dado;
   (2) x + 3 = x^2 - 6x + 9, obtido tirando a raiz quadrada dos dois lados de (1);
   (3) 0=x^2-7x+6, obtido pela subtração de $x+3$ dos dois lados de (2);
   (4) $0=(x-1)(x-6)$, obtido pela fatoração do lado direito de (3);
   (5) x = 1 ou x = 6, tirado de (4) porque ab=0 implica que a=0 ou b=0.

19. Comprove que pelo menos um dos números reais a_1, a_2,..., a_n é maior que ou igual ao valor da média desses números. Que tipo de demonstração você utilizou?
20. Comprove que se n é um número inteiro, estas quatro proposições são equivalentes: (i) n é par, (ii) $n+1$ é ímpar, (iii) $3n+1$ é ímpar, (iv) $3n$ é par.

Respostas:

1. Sejam $n=2k+1$ e $m=2l+1$ inteiros ímpares. Então, $n+m=2(k+l+1)$ é par.
2. Suponha que n seja par. Então, $n=2k$ para algum inteiro k. Portanto, $n^2=(2k)^2=4k^2=2(2k^2)$. Como escrevemos n^2 como 2 vezes um inteiro, concluímos que n^2 é par.
3. Demonstração direta: suponha que $m+n$ e $n+p$ sejam pares. Então, $m+n=2s$ para algum inteiro s e $n+p=2t$ para algum inteiro t. Se somarmos estas expressões, obtemos $m+p+2n=2s+2t$. Subtraindo $2n$ de ambos os lados e fatorando, temos $m+n=2s+2t-2n=2(s+t-n)$. Como escrevemos $m+p$ como 2 vezes um inteiro, concluímos que $m+p$ é par.
4. Como n é ímpar, podemos escrever $n=2k+1$ para algum inteiro k. Então, $(k+1)^2-k^2=k^2+2k+1-k^2=2k+1=n$.
5. Suponha que r seja racional e que i seja irracional e que $s=r+i$ seja racional. Então, pelo Exemplo 7, mostrado na página 79, $s+(-r)=i$ é racional, o que é uma contradição.
6. Como $\sqrt{2}.\sqrt{2}=2$ é racional e $\sqrt{2}$ é irracional, o produto de dois números irracionais não é necessariamente irracional.
7. Demonstração por contraposição: se $1/x$ fosse racional, então, por definição, $1/x=p/q$ para alguns inteiros p e q com $q \neq 0$. Como $1/x$ não pode ser 0 (se fosse, teríamos a contradição $1=x$. 0 ao multiplicar ambos os lados por x), sabemos que $p \neq 0$. Agora, $x=1/(1/x)=1/(p/q)=q/p$ pelas regras usuais da álgebra e da atirmética. Portando, x pode ser escrito como o quociente de dois inteiros com o denominador diferente de zero. Logo, por definição, x é racional.
8. Suponha que não seja verdade que $x \geq 1$ ou $y \geq 1$. Então, $x<1$ e $y<1$. Somando estas duas desigualdades, obtemos $x+y<2$, que é a negação de $x+y \geq 2$.
9. (a) Suponha que n seja impar, de modo que $n=2k+1$ para algum inteiro k. Então, $n^3+5=2(4k^3+6k^2+3k+3)$. Como n^3+5 é duas vezes algum inteiro, ele é par.
   (b) Suponha que n^3+5 seja ímpar e que n seja ímpar. Como n é ímpar e o produto de dois números ímpares é ímpar, seque que n^2 é ímpar e, então, que n^3 é ímpar. Mas, então, $5=(n^3+5)-n^3$ teria de ser par, pois é a diferença entre dois números ímpares. Portando, a suposição que n^3+5 e n eram ambos ímpares é falsa.
10. A proposição é vagamente verdadeira, pois 0 não é um inteiro positivo. Demonstração por vacuidade.
11. $P(1)$ é verdadeira pois $(a+b)^1=a+b \geq a^1+b^1=a+b$. Demonstração direta.
12. Se escolhêssemos 9 ou menos dias em cada dia da semana, isto cobriria no máximo 9*7=63 dias. Mas escolhemos 64 dias. Esta contradição mostra que pelo menos 10 dos dias que escolhemos devem ser no mesmo dia da semana.
13. Suponha por contradição que a/b seja uma raiz racional, em que a e b são inteiros e esta fração está o mais simplificada possivel(isto é, a e b não tem divisores comuns maiores do que 1). Substitua a raiz proposta na equação para obter $a^3/b^3+a/b+1=0$. Multiplique por b^3 para obter $a^3+ab^2+b^3=0$. Se a e b forem ambos ímpares, então o lado esquerdo é a soma de três números e, portanto, deve ser ímpar. Se a for ímpar e b for par, então o lado esquerdo é ímpar + par + par, o que é novamente ímpar. Analogamentem, se a for par e b for ímpar, então o lado esquerdo é par + par + ímpar, o que é novamente ímpar. Como a fração a/b está simplificada, não pode ocorrer de ambos, a e b, serem pares. Portanto, em todos os casos, o lado esquerdo é ímpar e, portanto, não pode ser igual a 0. Esta contradição mostra que não existe nenhuma raiz.
14. Primeiro, suponha que n seja ímpar, de modo que $n=2k+1$ para algum inteiro k. Então, $5n+6=5(2k+1)+6=10k+11=2(5k+5)+1$. Logo, $5n+6$ é ímpar. Para demonstrar a recíproca, suponha que n seja par, de modo que $n=2k$ para algum inteiro k. Então, $5n+6=10k+6=2(5k+3)$, de modo que $5n+6$ é par. Assim, n é ímpar se e somente se $5n+6$ for ímpar.
15. Esta proposição é verdadeira. Suponha que m não seja nem 1 nem -1. Então, mn tem um fator m maior do que 1. Por outro lado, $mn=1$, e 1 não tem um fator assim. Logo, $m=1$ ou $m=-1$. No primeiro caso, $n=1$, e no segundo caso, $n=-1$, pois $n=1/m$.
16. Demonstramos que todas estas são equivalentes a x ser par. Se x for par, então $x=2k$ para algum inteiro k. Portanto, $3x+2=3 \cdot 2k+2=6k+2=2(3k+1)$, que é par, pois foi escrito na forma $2t$, em que $t=3k+1$. Analogicamente, $x+5+2k+5=2k+4+1=2(k+2)+1$, de modo que $x+5$ é ímpar; e $x^2=(2k)^2=2(2k^2)$, de modo que x é par. Para as recíprocas, usaremos uma demonstração por contraposição. Assim, suponha que x não seja par; logo, x é ímpar e podemos escrever $x=2k+1$ para algum inteiro k. Então, 3x+2=3(2k+1)+2=6k+5=2(3k+2)+1, que é ímpar(isto é, não é par), pois foi escrito na forma $2t+1$, em que $t=3k+2$. Analogicamente, $x+5=2k+1+5=2(k+3)$, de modo que $x+5$ é par(isto é, não é ímpar). Que x^2 é ímpar já foi demonstrado no Exemplo 1.
17. Damos demonstrações por contraposição de $(i) \to (ii)$, $(ii) \to (i)$, $(i) \to (iii)$ e $(iii) \to (i)$. Para a primeira delas, suponha que 3x + 2 seja racional, ou seja, igual a p/q para inteiros p e q com $q \neq 0$. Então, podemos escrever x = ((p/q) - 2)/3 = (p - 2q)/(3q), em que 3q $\neq 0$. Isso mostra que x é racional. Para a segunda afirmação condicional, suponha que x seja racional, ou seja, igual a p/q com $q \neq 0$. Assim, podemos escrever 3x + 2 = (3p + 2p)/q, em que $q \neq 0$. Isto mostra que 3x + 2 é racional. Para a terceira afirmação condicional, suponha que $x/2$ seja racional, ou seja, igual a p/q para inteiros p e q com $q \neq 0$. Então, podemos escrever x = 2 p/q, em que $q \neq 0$. Isso mostra que x é racional. E para a quarta afirmação condicioanl, suponha que x seja racional, ou seja, igual a p/q para inteiros p e q com $q \neq 0$. Então, podemos escrever $x/2=p/(2q)$, em que 2q $\neq 0$. Isso mostra que $x/2$ é racional.
18. Não. No passo (2) falta considerar o caso em que $x+3=-(3-x)^2$.
19. Daremos uma demonstração por contradição. Suponha que a_1, a_2, ..., a_n sejam todos menores do que A, em que $A=(a_1+a_2+\cdots+a_n)/n$ é a média desses números. Então, $a_1+a_2+\cdots+a_n < nA$. Dividindo ambos os lados por n obtemos $A=(a_1+a_2+\cdots+a_n)/n < A$, que é uma contradição.
20. Mostraremos que as quatro formações são equivalentes indicando que (i) implica (ii), (ii) implica (iii), (iii) implica (iv) e (iv) implica (i). Primeiro, suponha que n seja par. Então, n+2k para algum inteiro k. Assim, n + 1 = 2k + 1, de modo que n + 1 é ímpar. Isso mostra que (i) implica (ii). A seguir, suponha que $n+1$ seja ímpar, de modo que $n+1=2k+1$ para algum inteiro k. Então, 3n+1=2n+(n+1)=2(n+k)+1, o que mostra que 3n + 1 é ímpar, indicando que (ii) implica (iii). A seguir, suponha que 3n+1 seja ímpar, de modo que 3n+1 = 2k+1 para algum inteiro k. Assim, 3n = 2k + 1) -1 = 2k, de modo que 3n é par. Isso mostra que (iii) implica (iv). Finalmente, suponha que n não seja par. Então, n é ímpar, de modo que $n=2k+1$ para algum inteiro k. Logo, 3n = 3(2k+1)=6k + 3 = 2(3k+1)+1, e 3n é ímpar. Isso completa a demonstração por contraposição de que (iv) implica (i).

Questões adicionais:

1. Use uma demonstração direta para mostrar que a soma de dois números inteiros pares é par.
2. Mostre que o inverso aditivo, ou negativo, de um número par é um número par, usando a demonstração direta.
3. Use uma demonstração direta para mostrar que o produto de dois números ímpares é ímpar.
4. Demonstre que se n é um quadrado perfeirto, então $n+2$ não é um quadrado perfeito.
5. Use uma demonstração direta para mostrar que o produto de dois números racionais é racional.
6. Demonstre ou contrarie que o produto de um número racional diferente de zero e um número irracional é irracional.
7. Demonstre que se x é racional e $x \neq 0$, então $1/x$ é racional.

8. Demonstre que se m e n são números inteiros e mn é par, então m é par ou n é par.
9. Demonstre que se n é um número inteiro e $3n + 2$ é par, então n é par, usando:
   (a) uma demonstração por contraposição.
   (b) uma demonstração por contradição.
10. Demonstre a proposição $P(1)$, em que $P(n)$ é a proposição "Se n é um número inteiro positivo, então $n^2 \geq n$". Qual tipo de demonstração você utilizou?
11. Mostre que se você pegar 3 meias de uma gaveta, com apenas meias azuis e pretas, você deve pegar ou um par de meias azuis ou um par de meias pretas.
12. Mostre que pelo menos 3 de quaisquer 25 dias escolhidos devem cair no mesmo mês do ano.
13. Demonstre que se n é um número inteiro positivo, então n é par se e somente se $7n + 4$ for par.
14. Demonstre que se $m^2 = n^2$ se e somente se $m = n$ ou $m = -n$.
15. Mostre que essas três proposições são equivalentes , em que a e b são números reais:(i) a é menor que (b), (ii) a média de a e b é maior que a, e (iii) a média de a e b é menor que b.
16. Mostre que essas proposições sobre o número real x são equivalentes: (i) x é racional, (ii) $x/2$ é racional, e (iii) $3x - 1$ é racional.
17. Esta é a razão para encontrar as soluções da equação $\sqrt{2x^2 - 1}$=x correta? (1) $\sqrt{2x^2 - 1}$=x é dado; (2) $2x^2$-1 = x^2, obtido pelo quadrado dos dois lados de (1); (3) x^2-1 = 0, obtido pela subtração de x^2 dos dois lados de (2); (4) $(x - 1)(x + 1) = 0$, obtido pela fatoração do lado esquerdo de x^2 - 1; (5) x = 1 ou x = -1, confirmado, pois $ab = 0$ implica que $a = 0$ ou $b = 0$.
18. Comprove que as proposições P_1, P_2, P_3 e P_4 podem ser equivalentes mostrando que $P_1 \leftrightarrow P_4$, $P_2 \leftrightarrow P_3$ e $P_1 \leftrightarrow P_3$.
19. Encontre um contra-exemplo para a proposição: todo número inteiro positivo pode ser escrito como a soma dos quadrados de três números inteiros.
20. Comprove que estas quatro proposições sobre o número inteiro n são equivalentes: (i) n^2 é ímpar, (ii) $1 - n$ é par, (iii) n^3 é ímpar, (iv) $n^2 + 1$ é par.