Matemática Computacional

Indução, Indução completa, Definição por Recursão

1. Prove por indução matemática que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}, n \geq 1.$$

2. Prove por indução matemática que

$$1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2, n \geq 1.$$

3. Prove por indução matemática que

$$2 * 1 + 2 * 2 + \ldots + 2 * n = n^2 + n, n \geq 1.$$

4. Ache a fórmula fechada para a soma

$$\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \ldots + \frac{1}{n*(n+1)}$$

Prove por indução matemática que o seu resultado é válido para todo $n \geq 1$.

5. Ache a fórmula fechada para o produto

$$(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4}) \ldots (1 - \frac{1}{n}) \qquad (1)$$

Prove por indução matemática que o seu resultado é válido para todo $n \geq 2$.

6. Ache a fórmula fechada para o produto

$$\frac{1}{1*3} + \frac{1}{3*5} + \frac{1}{5*7} + \ldots + \frac{1}{(2*n-1)*(2*n+1)}$$

Prove por indução matemática que o seu resultado é válido para todo $n \geq 1$.

7. Prove, por indução, que $2|n^2 + n$ é divisível por 2 para todo $n \geq 1$
8. Prove, por indução, que $3|n^3 - n$ é divisível por 3 para todo $n \geq 1$
9. Prove, por indução, que $4|n^4 - n$ é divisível por 4 para todo $n \geq 1$
10. Prove por indução que $8|3^{2n} - 1$ para todo $n \geq 0$. (Dica: $3^2 * 3^{2k} - 1 = (8+1) * 3^{2k} = 8 * 3^{2k} + 3^{2k}$).
11. Prove por indução que $4|5^n - 1$ para todo $n \geq 1$. (Dica: $5^{k+1} = 5 * 5^k = (4+1) * 5^k$).
12. Prove por indução que $3|4^n - 1$ para todo $n \geq 1$. (Dica: $4^{k+1} = 4 * 4^k = (3+1) * 4^k$).
13. Prove por indução $5|8^n - 3^n$ para todo $n \geq 1$. (Dica: $8^{k+1} - 3^{k+1} = 8^{k+1} - 3 * 8^k + 3 * 8^k - 3^{k+1}$)
14. Prove, por indução, que $5|7^n - 2^n$ para todo $n \geq 1$.
15. Prove, por indução, que $5|11^n - 6$ para todo $n \geq 1$.
16. Prove, por indução, que $6|n^3 - n$ para todo $n \geq 1$.
17. Prove, por indução, que $7|2^{n+2} + 3^{2n+1}$ para todo $n \geq 1$.
18. Prove por indução que $a * 10^n \equiv a(\textbf{ mod } 3)$ para todo $n \geq 0$.
19. Prove por indução que $a * 10^n \equiv a(\textbf{ mod } 9)$ para todo $n \geq 0$.
20. Prove por indução que $10^n \equiv 0(\textbf{ mod } 4)$ para todo $n \geq 2$.
21. Prove por indução que $10^n \equiv 0(\textbf{ mod } 5)$ para todo $n \geq 1$.
22. Prove por indução que $10^n \equiv (-1)^n(\textbf{ mod } 11)$ para todo $n \geq 0$.
23. Têm-se 2^n moedas de ouro, sendo uma delas falsa, com o peso menor do que as demais. Dispõe-se de uma balança de dois pratos, sem nenhum peso.

Prove por indução que é possível achar a moeda falsa com n pesagens.

24. Têm-se 3^n moedas de ouro, sendo uma delas falsa, com o peso menor do que as demais. Dispõe-se de uma balança de dois pratos, sem nenhum peso.

Prove por indução que é possível achar a moeda falsa com n pesagens.

25. Considere seguinte predicado $P(n)$:

$P(n)$: O inteiro positivo n pode ser escrito como a soma de 4's e 7's.

(a) Prove que $P(n)$ é válido usando indução matemática para todo $n \geq 18$.

(b) Prove que $P(n)$ é válido usando indução matemática completa para todo $n \geq 18$.

26. (a) Determine quais postagens podem ser feitas usando-se apenas selos de 4 e 11 centavos.

(b) Demonstre sua resposta de (a) usando o princípio da indução matemática. Certifique-se de afirmar explicitamente sua hipótese indutiva no passo de indução.

(c) Demonstre sua resposta de (a) usando a indução completa. Em que a hipótese indutiva dessa demonstração difere da demonstração usada com indução matemática?

27. Considere esta variação do jogo de Nim. O jogo começa com n cartas. Dois jogadores podem remover as cartas uma, duas ou três de cada vez. O jogador que remover a última carta, perde. Use a indução completa para mostrar que se cada jogador jogar com a melhor estratégia possível, o primeiro vence, se $n = 4j, 4j+2$ ou $4j+3$ para qualquer número inteiro não negativo j, e o segundo jogador vence no outro caso possível, quando $n = 4j+1$ para qualquer número inteiro não negativo j.
28. Assuma que uma barra de chocolate tenha n quadrados organizados em formato retangular. A barra, com um pedaço retangular a menos que a barra original, pode ser quebrada na horizontal ou na vertical separando-se os quadrados. Admitindo que apenas um pedaço pode ser quebrado de cada vez, quantas vezes você deve quebrar a barra sucessivamente em n quadrados separados? Use a indução completa para demonstrar sua resposta.
29. Suponha que você comece com um pilha de n pedras e divida-a em n pilhas com uma pedra cada, separando, sucessivamente, uma pilha de pedras em duas menores. Cada vez que você faz a divisão, multiplica o número de pedras em cada uma das pilhas menores formadas; para que elas tenham r e s pedras, respectivamente, você computa rs. Mostre que não importa como você separa as pilhas, a soma dos produtos computados em cada etapa é igual a $n(n-1)/2$.
30. Encontre o erro na seguinte prova que todos os cavalos são da mesma cor.

Afirmação: Em qualquer conjunto de h cavalos, todos os cavalos são da mesma cor.

Base: Para $h = 1$. Em qualquer conjunto contendo somente um cavalo, todos os cavalos claramente são da mesma cor.

Passo de Indução: Para $k \geq 1$, vamos supor que a afirmação é verdadeira para $h = k$ e vamos provar que ela é verdadeira para h = k+1. Tome qualquer conjunto H de k+1 cavalos. Mostraremos que todos os cavalos nesse conjunto são da mesma cor. Remova um cavalo desse conjunto para obter o conjunto H_1 com apenas k cavalos. Pela hipótese de indução, todos os cavalos em H_1 são da mesma cor. Agora reponha o cavalo que fora retirado e remova um outro, obtendo um conjunto H_2. Pelo mesmo argumento, todos os cavalos em H_2 são da mesma cor. Conseqüentemente, todos os cavalos em H têm que ter a mesma cor, e a prova está completa.

31. Encontre a falha na seguinte "demonstração" de que toda postagem de três centavos ou mais pode ser feita usando-se apenas selos três e quatro centavos. *Passo base:* Podemos fazer postagens de três centavos com apenas um selo de três, e podemos fazer postagens de quatro centavos usando apenas um selo de quatro centavos. *Passo de Indução:* Assuma que podemos fazer postagens de j centavos para todos os números inteiros não negativos j com $j \leq k$ usando apenas selos de três e quatro centavos.Então, podemos fazer postagens de $k+1$ centavos substituindo um selo de três centavos por um selo de quatro centavos ou substituindo dois selos de quatro centavos por três selos de três centavos.
32. Seja a seqüência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definida como

$$\begin{array}{lcl} a_1 & = & 3 \\ a_n & = & 7 * a_{n-1}, \forall n \geq 2 \end{array}$$

Prove por indução matemática que $a_n = 3 * 7^{n-1}$ para todos os inteiros $n \geq 1$.

33. Seja a seqüência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definida como

$$\begin{array}{lcl} a_1 & = & 1 \\ a_2 & = & 3 \\ a_k & = & a_{k-2} + 2a_{k-1} \forall k \geq 3 \end{array}$$

Prove por indução matemática que a_n é ímpar para todos os inteiros $n \geq 1$.

34. Seja a seqüência $g_0, g_1, g_2, \ldots$ definida como

$$\begin{array}{lcl} g_0 & = & 12 \\ g_1 & = & 29 \\ g_k & = & 5g_{k-1} - 6g_{k-2}, \forall k \geq 2 \end{array}$$

Prove por indução matemática que $g_n = 5 * 3^n + 7 * 2^n$ para todos os inteiros $n \geq 0$.

35. Seja a seqüência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definida como

$$\begin{array}{lcl} a_0 & = & 3 \\ a_n & = & 5 * a_{n-1} + 8, \forall n \geq 1 \end{array}$$

Prove por indução matemática que $a_n \equiv 3\ (\textbf{ mod } 4)$ para todos os inteiros $n \geq 0$.