Matemática Básica
Lista de Exercícios 01

Revisão de Lógica

Operadores Lógicos

1. Sejam dadas as seguintes sentenças:

   p = "Você está em Quixadá".
   q = "Você está em Quixeramobim".
   r = "Você está no Ceará".

   (a) Traduza a sentença seguinte para símbolos da lógica formal: Se você não está no Ceará, então você não está em Quixadá ou em Quixeramobim.
   (b) Traduza para o português a contrapositiva da sentença do item (a)
   (c) Traduza para o português a negação da sentença do item (a).

2. Responda, justificando:

   (a) Sabendo que o valor lógico de r é F, determine, se possível, o valor lógico de $(p \to q) \to (\neg r)$
   (b) Sabendo que o valor lógico de q é V , determine, se possível, o valor lógico de $(q \vee (p \wedge \neg p)) \leftrightarrow (\neg q)$

3. Determine o valor lógico de p:

   (a) Sabendo que o valor lógico de $q \wedge (p \to t) \wedge \neg(r \wedge t) \wedge \neg(r \to s) \wedge \neg(q \vee s)$ é V.
   (b) Sabendo que o valor lógico de $\neg q \wedge (r \to q) \wedge (\neg p \vee r)$ é V.

Regras de Equivalência Lógica

4. De acordo com o raciocínio lógico-matemático, a negação da frase: "o obstetra evitou a realização da cesariana desnecessária e a gestante entrou em trabalho de parto" é apresentada corretamente na frase:

   (a) o obstetra não evitou a realização da cesariana desnecessária ou a gestante não entrou em trabalho de parto.
   (b) o obstetra não evitou a realização da cesariana desnecessária e a gestante não entrou em trabalho de parto.
   (c) o obstetra não evitou a realização da cesariana desnecessária ou a gestante entrou em trabalho de parto.
   (d) o obstetra evitou a realização da cesariana desnecessária ou a gestante entrou em trabalho de parto.
   (e) o obstetra evitou a realização da cesariana desnecessária e a gestante entrou em trabalho de parto.

5. A negação da proposição: "Se o número inteiro $m > 2$ é primo, então o número m é ímpar" pode ser expressa corretamente por:

   (a) "O número inteiro m > 2 é não primo e o número m é ímpar".
   (b) "Se o número inteiro m > 2 não é primo, então o número m não é ímpar".
   (c) "Se o número m não é ímpar, então o número inteiro $m > 2$ não é primo".
   (d) "Se o número inteiro m > 2 não é primo, então o número m é ímpar".
   (e) "O número inteiro m > 2 é primo e o número m não é ímpar".

6. Uma proposição logicamente equivalente a "se eu não posso pagar um táxi, então vou de ônibus" é a seguinte:

   (a) se eu não vou de ônibus, então posso pagar um táxi
   (b) se eu posso pagar um táxi, então não vou de ônibus
   (c) se eu vou de ônibus, então não posso pagar um táxi
   (d) se eu não vou de ônibus, então não posso pagar um táxi

7. Se Marcos não estuda, João não passeia. Logo:

   (a) Marcos estudar é conclusão necessária para João não passear;
   (b) Marcos estudar é condição suficiente para João passear;
   (c) Marcos não estudar é condição necessária para João não passear;
   (d) Marcos não estudar é condição suficiente para João passear;
   (e) Marcos estudar é condição necessária para João passear.

8. Dizer que "Ana é alegre ou Beatriz é feliz" é, do ponto de vista lógico, o mesmo que dizer:

   (a) Se Ana não é alegre, então Beatriz é feliz;
   (b) Se Beatriz é feliz, então Ana é alegre;
   (c) Se Ana é alegre, então Beatriz é feliz;
   (d) Se Ana é alegre, então Beatriz não é feliz;
   (e) Se Ana não é alegre, então Beatriz não é feliz.

9. Mostre que cada uma das proposições condicionais abaixo é uma tautologia.

   (a) $[\neg p \wedge (p \vee q)] \to q$
   (b) $[(p \to r) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
   (c) $[p \wedge (p \to q)] \to q$
   (d) $[(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)] \to r$

10. Mostre que cada uma das proposições condicionais do exercício anterior é uma tautologia, sem usar a tabela-verdade.
11. Use uma sequência de equivalências lógicas para mostrar se $(\neg p \wedge (p \to q)) \to \neg q$ é uma tautologia.
12. Use uma sequência de equivalências lógicas para mostrar $p \leftrightarrow q$ e $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ são equivalentes.
13. Usando as equivalências lógicas, encontre uma proposição equivalente a proposição

$$p \vee ((\neg q \wedge r) \to p)$$

    que use somente os conectivos $\wedge$ e $\neg$
14. Mostre se o seguinte argumento é válido ou não usando as formas válidas de argumentos. Em cada passo, identifique a razão para se obter a conclusão:

   (a) $\neg p \to (r \wedge \neg s)$
   (b) $t \to s$
   (c) $u \to \neg p$
   (d) $\neg w$
   (e) $u \vee w$
   (f) $\therefore \neg t \vee w$

15. Mostre se o seguinte argumento é válido ou não usando as formas válidas de argumentos. Em cada passo, identifique a razão para se obter a conclusão:

   (a) $p \to q$
   (b) $r \vee s$
   (c) $\neg s \to \neg t$
   (d) $\neg q \vee s$
   (e) $\neg s$
   (f) $(\neg p \wedge r) \to u$
   (g) $w \vee t$
   (h) $\therefore u \wedge w$

Lógica de Predicados

16. Transcreva de duas formas cada uma das proposições em expressões lógicas usando predicados, quantificadores e operadores lógicos. Primeiro, o domínio são os estudantes em uma sala, e, segundo, considere-o como todas as pessoas.

   (a) Todos em uma sala têm um celular.
   (b) Alguém em sala viu um filme estrangeiro.
   (c) Há uma pessoa em sua sala que não sabe nadar.
   (d) Todos os estudantes em sua sala sabem resolver equações quadráticas.
   (e) Algum estudante de sua sala não quer ficar rico.

17. Escreva a negação e a contrapositiva da seguinte afirmação:

    Um Lannister sempre paga suas dívidas.

18. Barbosa afirmou: "Todo cidadão brasileiro tem direito à educação e à saúde". A negação lógica dessa sentença é:

   (a) Nenhum cidadão brasileiro tem direito à educação e à saúde.
   (b) Nenhum cidadão brasileiro tem direito à educação ou à saúde.
   (c) Todo cidadão brasileiro não tem direito à educação e à saúde.
   (d) Algum cidadão brasileiro não tem direito à educação ou à saúde.
   (e) Algum cidadão brasileiro não tem direito à educação nem à saúde.

19. Dados os predicados:

    $P(x)$ = "x é par".
    $Q(x)$ = "x é menor que 5".
    $R(x)$ = "x é primo".

    determine o conjunto verdade das proposições abaixo, sob o universo U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}:

   (a) $\neg P(x) \vee Q(x)$
   (b) $Q(x) \to R(x)$
   (c) $P(x) \to Q(x) \vee R(x)$
   (d) $(\neg P(x) \leftrightarrow Q(x)) \wedge R(x)$

20. Sejam os predicados $P(x, y) : x^2 = y$ e $Q(x) : x + y \geq 0$, onde as variáveis x e y estão no universo $U = \{-1, 0, 1\}$. Determine o valor lógico das sentenças abaixo (justificando):

   (a) $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$

(b) $(\exists x)(\forall y)Q(x,y)$

21. Sejam dados os predicados a seguir no domínio de todos os carros.

$F(x)$	=	" x é rápido"
$S(x)$	=	"x é esportivo"
$E(x)$	=	"x é caro"
$A(x,y)$	=	"x é mais seguro que y"

(a) Escreva as seguintes sentenças usando a lógica de predicados.

i. Todos os carros esportivos são rápidos.

ii. Existem carros rápidos que não são esportivos.

iii. Todo carro esportivo é caro.

(b) Escreva a seguinte sentença de lógica de predicados usando um português quotidiano. Não traduza somente palavra por palavra; sua sentença deve fazer sentido.

$$\forall x[S(x) \rightarrow (\exists y)(E(y) \vee A(y,x))]$$

(c) Negue formalmente a sentença do item (b). Simplifique a sua negação de forma que não restem quantificadores dentro do escopo de uma negação. Diga quais regras de derivação foram usadas.

(d) Dê a tradução da sua sentença negada usando um português cotidiano.

22. Considerando verdadeiro que : "Nenhum surfista é estudioso" e "Algum informático é estudioso". Podemos corretamente concluir que:

(a) Todo informático é surfista.

(b) Todo informático não é surfista.

(c) Algum informático é surfista.

(d) Algum informático não é surfista.

(e) Nenhum informático é surfista.

Regras de Inferência

23. Use as regras de inferência para mostrar que as hipóteses "Se não chove ou não tem neblina, então a competição de vela acontecerá e a apresentação de salvamento continuará", "Se a competição de vela é mantida, então o troféu será conquistado" e "O troféu não foi conquistado" implicam a conclusão "Choveu".

24. Se Nestor disse a verdade, Júlia e Raul mentiram. Se Raul mentiu, então Lauro falou a verdade. Se Lauro falou a verdade, há um leão feroz nesta sala. Ora, não há um leão feroz nesta sala. O que podemos concluir?

25. Há três suspeitos de um crime: o cozinheiro, a governanta e o mordomo. Sabe-se que o crime foi efetivamente cometido por um ou por mais de um deles, já que podem ter agido individualmente ou não. Sabe-se, ainda, que:

- Se o cozinheiro é inocente então a governanta é culpada.
- ou o mordomo é culpado ou a governanta é culpada, mas não ambos.
- o mordomo não é inocente.

O que podemos concluir através das regras de inferência?

26. Quais das implicações abaixo são verdadeiras? Justifique através das regras de inferência:

(a) $(\forall x)[P(x) \wedge Q(x)] \rightarrow ((\forall x)P(x)) \wedge ((\forall x)Q(x)$

(b) $(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \rightarrow ((\forall x)P(x)) \vee ((\forall x)Q(x)$

27. Para cada argumento abaixo, aponte quais regras de inferência foram utilizadas em cada passo.

(a) "Linda, uma estudante desta sala, tem um conversível vermelho. Todo mundo que tem um conversível vermelho tem pelo menos uma multa por excesso de velocidade. Por isso, alguém nesta sala tem uma multa por excesso de velocidade."

(b) "Cada um dos cinco colegas de quarto, Melissa, Aaron, Ralph, Veneesha e Keeshawn, frequentou um curso de matemática discreta. Todo estudante que frequentou um curso de matemática discreta pode frequentar um curso de algoritmo. Por isso, todos os cinco colegas de quarto podem frequentar um curso de algoritmo próximo ano."

(c) "Todos os filme produzidos por Jonh Sayles são maravilhosos. Jonh Sayles produziu um filme sobre mineiros de carvão mineral. Por isso, há um filme maravilhoso sobre mineiros de carvão."

(d) "Há alguém nesta sala que foi à França. Todos que vão à França visitam Louvre. Por isso, alguém nesta sala visitou o Louvre."

28. Identifique o(s) erro(s) neste argumento que supostamente mostra(m) que se $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ é verdadeira, então $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$ é verdadeira.

(a) $1.\forall P(x) \vee Q(x))$ Premissa

(b) $2.P(c) \vee Q(c)$ Instanciação universal de (1)

(c) $3.P(c)$ Simplificação de (2)

(d) $4.\forall xP(x)$ Generalização universal de (3)

(e) $5.Q(c)$ Simplificação de (5)

(f) $6.\forall xQ(x)$ Generalização universal de (5)

(g) $7.\forall x(P(x) \vee \forall xQ(x))$ Conjunção de (4) e (6)

29. Traduza os argumentos e justifique a sua validade ou invalidade. Para as falácias, apresente um conjunto universo e uma combinação de valores lógicos que justifique a invalidade e para os válidos, demonstre a sua validade usando as equivalências e regras de inferências.

(a) Alguns políticos não são honestos. Alguns sindicalistas são políticos. Logo, alguns sindicalistas não são honestos.

(b) Todos os estudantes são dedicados. Algumas pessoas inteligentes são estudantes. Portanto, algumas pessoas inteligentes são dedicadas.