Matemática Discreta
Lista de Exercícios 05

Sequências e Somatórios

Soma	Fórmula Fechada
$\sum_{k=1}^{n} k$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$, $\|x\| < 1$	$\frac{1}{(1-x)^2}$

1. Escreva as seguintes soma na notação de somatório:

   (a) $2*1+2*2+\ldots+2*n$

   (b) $1+3+\ldots+(2n-1)$

   (c) $\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}+\ldots+\frac{1}{n*(n+1)}$

   (d) $\frac{1}{1*3}+\frac{1}{3*5}+\frac{1}{5*7}+\ldots+\frac{1}{(2*n-1)*(2*n+1)}$

2. Qual o termo a_8 da sequência $\{a_8\}$ da sequência $\{a_n\}$ se a_n é igual a

   (a) 2^{n-1}?
   (b) 7?
   (c) $1+(-1)^n$?
   (d) $-(-2)^n$?

3. Quais são os termos a_0, a_1, a_2 e a_3 da sequência $\{a_n\}$, em que a_n é igual a

   (a) $(-2)^n$?
   (b) 3?
   (c) $7+4^n$?
   (d) $2^n+(-2)^n$?

4. Quais são os valores das somas abaixo, em que $S=\{1,3,5,7\}$?

   (a) $\sum_{j\in S} j$
   (b) $\sum_{j\in S} j^2$
   (c) $\sum_{j\in S} (1/j)$
   (d) $\sum_{j\in S} 1$

5. Encontre o valor de cada uma das somas a seguir.

   (a) $\sum_{j=0}^{8}(1+(-1)^j)$
   (b) $\sum_{j=0}^{8}(3^j-2^j)$
   (c) $\sum_{j=0}^{8}(2\cdot 3^j+3\cdot 2^j)$
   (d) $\sum_{j=0}^{8}(2^{j+1}-2^j)$

6. Compute cada uma das somas duplas abaixo.

   (a) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}(i-j)$
   (b) $\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{2}(3i+2j)$
   (c) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{2} j$
   (d) $\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{3} i^2j^3$

7. Calcule utilizando a soma telescópica:

   (a) $\sum_{k=2}^{n} 2^k-2^{k-1}$
   (b) $\sum_{k=1}^{n}(k-1)k-k(k+1)$
   (c) $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3-k^3$
   (d) $\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{4^k}-\frac{1}{4^{k+1}})$

8. Sabendo que $(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$. Calcule:

   (a) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}$

   (b) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^i$

   (c) $\sum_{i=0}^{n} i\cdot\binom{n}{i}$

9. A sequência de Fibonacci pode ser definida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \\ f_2 &= 1 \\ a_n &= f_{n-1}+f_{n-2}, \forall n \geq 3 \end{aligned}$$

   Mostre que a sequência de Fibonacci satisfaz às seguintes identidades:

   (a) $f_1+f_2+\ldots+f_n=f_{n+2}-1$. (Dica: Substitua cada termo f_i por $f_{i+2}-f_{i+1}$)

   (b) $f_1+f_3+\ldots+f_{2n-1}=f_{2n}$. (Dica: Substitua cada termo f_i por $f_{i-1}+f_{i-2}$ para todo $i\geq 3$. Utilize a identidade do item anterior.)

   (c) $f_2+f_4+\ldots+f_{2n}=f_{2n+1}-1$. (Dica: Substitua cada termo f_i por $f_{i+1}-f_{i-1}$. Separe em dois somatórios. Utilize as duas identidades anteriores.)

10. Sabendo que $k^2-(k-1)^2=2k-1$. Logo, $\sum_{k=1}^{n}k^2-(k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}2k-1$. Use essa igualdade para:

    (a) Encontrar uma fórmula para $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

    (b) Encontrar uma fórmula para $\sum_{k=1}^{n}k$.

11. Sabemos que

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3-k^3=\sum_{k=1}^{n}k^3+3k^2+3k+1-k^3=\sum_{k=1}^{n}3k^2+3k+1 \quad (1)$$

    Logo, $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3-k^3=\sum_{k=1}^{n}3k^2+3k+1$. Use essa igualdade para

    (a) Encontrar uma fórmula para $\sum_{k=1}^{n}3k^2+3k+1$

    (b) Encontrar uma fórmula para $\sum_{k=1}^{n}k^2$.

12. Sabendo que $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$. Logo, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$. Use essa igualdade para

    (a) Encontrar uma fórmula para $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

13. Sabendo que $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1})$. Logo, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1})$. Use essa igualdade para

    (a) Encontrar uma fórmula para $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

14. A repetição abaixo é uma parte de uma implementação do algoritmo de ordenação por seleção que ordena uma lista de itens de um conjunto ordenado (números, caracteres, palavras, etc) em uma ordem crescente.

```
1 for(int i = 1; i <=n; i++)
2     for(int j = i + 1; j <=n; j++)
3         if( A[i] > A[j])
4             troque A[i] e A[j]
```

    Quantas vezes a comparação $A[i]>A[j]$ é feita na linha 3?

15. Considere o programa abaixo:

```
1 for(int i = 1; i <=n; i++)
2     for(int j = 1; j <= n-i; j++)
3         operacao;
```

    Quantas vezes a operação é realizada na linha 3?

16. Considere o programa abaixo:

```
count = 0;
for(int i = 1; i <=n; i++)
  for(int j = 1; j <= i; j++)
    count = count + 1;
```

    Transforme o programa em somatório e descubra o valor final de count.

17. Considere o seguinte trecho de código:

```
prog1(int n){
  if(n==1){
    printf("oi");
        return;
  }else{
    for(i=1;i<=n;i++)
        printf("oi");
    prog1(n-1);
  }
}
```

Seja $T(n)$ o número de vezes que a palavra oi é impressa quando prog1 é chamada com o parâmetro n.

(a) Calcule o valor de $T(1)$

(b) Determine uma relação recorrência para $T(n)$.

(c) Resolva a relação de recorrência do item anterior

18. Considere o seguinte trecho de código:

```
prog2(int n){
  if(n==1) printf("oi\n");
    else{
    printf("oi\n");
     prog2(n/2);
    }
}
```

Seja $T(n)$ o número de vezes que a palavra oi é impressa quando prog2 é chamada com o parâmetro n.

(a) Calcule o valor de T(1)

(b) Encontre uma relação recorrência para T(n).

(c) Resolva a relação de recorrência, assumindo que $n = 2^k$, para algum k inteiro.

19. Considere o seguinte trecho de código:

```
prog3(int n){
  if(n==1) printf("oi\n");
  else{
    for(i=1;i<=n;i++) printf("oi\n");
    prog3(n/2);
  }
}
```

Seja $T(n)$ o número de vezes que a palavra oi é impressa quando prog3 é chamada com o parâmetro n.

(a) Calcule o valor de $T(1)$

(b) Encontre uma relação de recorrência para T(n).

(c) Resolva a relação de recorrência, assumindo que $n = 2^k$, para algum k inteiro.

20. Usando o método iterativo, ache a fórmula fechada para a seguinte seqüencia $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$\begin{array}{lcl} a_0 & = & 1 \\ a_n & = & a_{n-1} + 1, \forall n \geq 1 \end{array}$$

21. Usando o método iterativo, ache a fórmula fechada para a seguinte seqüencia $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$\begin{array}{lcl} a_0 & = & 1 \\ a_n & = & a_{n-1} + n, \forall n \geq 1 \end{array}$$

22. Usando o método iterativo, ache a fórmula fechada para a seguinte seqüencia $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$\begin{array}{lcl} a_0 & = & 1 \\ a_n & = & 2 * a_{n-1}, \forall n \geq 1 \end{array}$$

23. Usando o método iterativo, ache a fórmula fechada para a seguinte seqüencia $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$\begin{array}{lcl} a_0 & = & 1 \\ a_n & = & n * a_{n-1}, \forall n \geq 1 \end{array}$$

24. Usando o método iterativo, ache uma fórmula fechada para seguinte a seqüência $g_0, g_1, g_2, \ldots$ definida como

$$\begin{array}{lcl} g_0 & = & 12 \\ g_1 & = & 29 \\ g_k & = & 5g_{k-1} - 6g_{k-2}, \forall k \geq 2 \end{array}$$

25. Vamos calcular o valor da seguinte soma

$$q + q^2 + \ldots + q^n = \sum_{k=1}^{n} q^k \quad (2)$$

Primeiramente, multiplique por (q-1) e distribua os fatores para obter uma soma telescópica:

$$(q-1)\sum_{k=1}^{n} q^k = \sum_{k=1}^{n} (q-1)q^k = \sum_{k=1}^{n} q^{k+1} - q^k = q^{n+1} - q. \quad (3)$$

Dividindo ambos os lados por (q-1), obtemos a seguinte fórmula

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - q}{q - 1}. \quad (4)$$

que é válida para qualquer $q \neq 1$

Mostre que (quando $q \neq 1$)

$$\sum_{k=1}^{n} kq^k = \frac{nq^{n+1}}{q-1} - \frac{q^{n+1} - q}{(q-1)^2} \quad (5)$$

Dica: Multiplique a soma por (q-1) e distribua ao fatores. Desenvolva os primeiros termos do somatório e realize alguns cancelamentos. O resultado é somatório fácil de ser calculado usando fórmulas conhecidas.

26. Use (5) para computar $\sum_{k=1}^{5} k(2^k)$

27. Use as propriedades dos somatórios para mostrar que

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}, \text{ para } |x| < 1. \quad (6)$$

Dica: Faça $S = 1 + x + x^2 + \ldots$. Calcule $S' = S \cdot x$. Cancele os termos em comum de $S - S'$.

28. Use as propriedades dos somatórios para mostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2}, \text{ para } |x| < 1. \quad (7)$$

Dica: Reescreva o somatório $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$ como infinitos somatórios infinitos.