Indução Matemática

Wladimir Araújo Tavares [1]

[1]Universidade Federal do Ceará - Campus de Quixadá

2 de novembro de 2016

Princípio da Indução Matemática

Definição

Seja $P(n)$ um predicado definido para os inteiros n e n_0 um inteiro fixo. Suponha que as duas afirmações seguintes sejam verdadeiras:

1. *$P(n_0)$ é verdade (Caso Base)*
2. *Para todo $n \geq n_0$, se $P(k)$ é verdade então $P(k+1)$ é verdade. (Passo Indutivo)*

Podemos concluir que

- *Para todo inteiro $n \geq n_0$, $P(n)$ é verdade*

Princípio da Indução Matemática

Este princípio pode ser expresso pela seguinte regra de inferência:

$$[P(n_0) \land \forall k(P(k) \to P(k+1))] \to \forall n \geq n_0 P(n) \tag{1}$$

Observações:

- Em uma prova por indução matemática não assumimos que $P(k)$ é verdade para todo os inteiros. Mostramos que se $P(k)$ é verdade então $P(k+1)$ é verdade também.
- Na prova por indução, devemos usar obrigatoriamente o predicado $P(k)$ (Hipótese de Indução).

Ângulos Internos

Prove, por indução, que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados ($n \geq 3$) é igual a $S(n) = (n-2) \cdot 180$.

Passo Base: Temos que mostrar que a propriedade vale para um polígono de 3 lados.

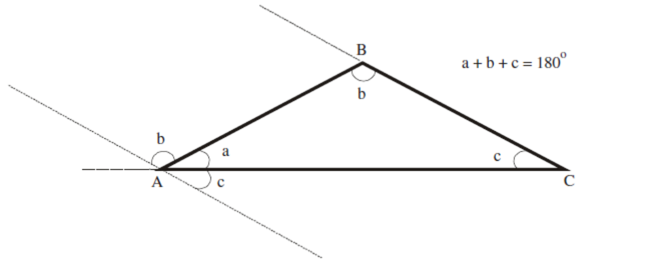

Figura: Propriedade válida para $n = 3$

Ângulos Internos

Passo Indutivo: Suponhamos que, para algum $k > 3$, a soma dos ângulos internos seja $(k-2) \cdot 180$ (Hipótese de Indução). Vamos mostrar que a soma dos ângulos internos de polígono de $k+1$ é $(k+1-2) \cdot 180$.

Considere um polígono de $k+1$ lados com vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}$. Se unirmos v_1 a v_k teremos um polígono de k lados, por hipótese, a soma dos ângulos internos é $(k-2) \cdot 180$.

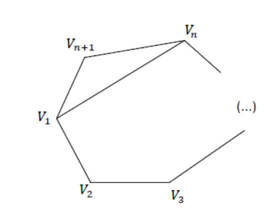

Figura: Polígono de $k+1$ lados

Ângulos Internos

Logo, a soma dos ângulos internos do polígono de $k + 1$ lados é:

$$(k-2)\cdot 180 + 180 = (k-2+1)\cdot 180. \tag{2}$$

Moeda Falsa

Umas das 2^n moedas de ouro de um Rei é falsa e pesa menos que as demais. A diferença só pode determinada com o uso de uma balança de dois pratos. Mostre que com n pesagens o Rei pode descobrir qual é a moeda falsa.

1. **Passo Base:** Para $n = 1$, temos 2 moedas. Colaca-se uma moeda em cada prato. A moeda que pesa menos está no prato que estiver mais alto.
2. **Passo Indutivo:** Suponha que, para algum k, com k pesagens é possível descobrir a moeda falsa dentre 2^k moedas (Hipótese de Indução). Vamos mostrar com $k+1$ pesagens é possível encontrar a moeda falsa dentre 2^{k+1} moedas.

Moeda Falsa

Considerando 2^{k+1} moedas, podemos dividir as moedas em 2 grupos com 2^k moedas, descobrimos com 1 pesagem em qual grupo se encontra a moeda falsa. Por hipótese, sabemos que com k pesagem descobrirmos a moeda falsa dentre 2^k moedas. Logo, o total de pesagem será $k+1$.

Somatório

Prove, por indução, que

$$P(n) : 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{3}$$

para todos inteiros $n \geq 1$.

Demonstração.

1. **Passo Base:** Para n $= 1$, $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.
2. **Passo Indutivo:** Considere que a propriedade vale para $P(k)$, ou seja,

$$P(k) : 1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2} \tag{4}$$

para algum inteiro $k \geq 1$[Hipótese de Indução]

$\square$

Somatório

Demonstração.

Devemos mostrar que

$$P(n+1): 1+2+\ldots+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \tag{5}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} 1+2+\ldots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2}+k+1 \\ &= \frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

$\square$

Observe que na prova por indução devemos usar obrigatoriamente o predicado $P(k)$ para mostrar que $P(k+1)$
Por exemplo, a soma

$$\begin{array}{cc} 1+2+\ldots+k & +(k+1) \\ P(k) & +(k+1) \\ \frac{k(k+1)}{2} & +(k+1) \end{array} \tag{6}$$

Divisibilidade

Prove, por indução, que

$$P(n) : 2^{2n} - 1 \text{ é divisível por 3.} \tag{7}$$

para $n \geq 1$

1. **Passo Base:** Para n $= 1$, $2^{2 \cdot 1} - 1 = 3$ que é divisível por 3.
2. **Passo Indutivo:** Assuma que $2^{2k} - 1$ é divisível por 3.[Hipótese de Indução]

Divisibilidade

Devemos mostrar que

$$2^{2(k+1)} - 1 \text{ é divisível por 3.} \tag{8}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} 2^{2(k+1)} - 1 &= 2^{2k+2} - 1 \\ &= 2^{2k} \cdot 2^2 - 1 \\ &= 2^{2k} \cdot 4 - 1 \\ &= 2^{2k} \cdot (3+1) - 1 \\ &= 3 \cdot 2^{2k} + (2^{2k} - 1) \end{aligned} \tag{9}$$

Relação de Recorrência

Seja a sequência $a_1, a_2, \ldots$ definida como

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_n &= 5a_{n-1} \quad , n \geq 2 \end{aligned} \tag{10}$$

Prove, por indução, que

$$a_n = 2 \cdot 5^{n-1} \tag{11}$$

para $n \geq 1$

1. **Passo Base:** Para $n = 1$, $a_1 = 2 \cdot 5^{1-1} = 2 \cdot 1 = 2$.
2. **Passo Indutivo:** Assuma que a propriedade vale para algum $k \geq 1$, ou seja, $a_k = 2 \cdot 5^{k-1}$ [Hipótese de Indução]

Relação de Recorrência

Devemos mostrar que

$$a_{k+1} = 2 \cdot 5^{k+1-1} = 2 \cdot 5^k \qquad (12)$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 5 \cdot a_k \\ &= 5 \cdot (2 \cdot 5^{k-1}) \quad \text{[Hipótese de Indução]} \\ &= 2 \cdot 5^k \end{aligned} \qquad (13)$$

Desigualdade

Prove, por indução, que

$$2^n < n! \tag{14}$$

para todo $n \geq 4$

1. **Passo Base:** Para $n = 4$, temos $2^4 = 16 < 24 = 4!$
2. **Passo Indutivo:** Assuma que para algum inteiro $k \geq 4$, $2^k < k!$ [Hipótese de Indução].

Desigualdade

Devemos mostrar que

$$2^{k+1} < (k+1)!. \tag{15}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2 \cdot 2^k \\ &< 2 \cdot k! \\ &< (k+1) \cdot k! \\ &< (k+1)! \end{aligned} \tag{16}$$

Postagem

Prove, por indução, que toda postagem de 12 centavos ou mais pode ser formada usando selos de 4 e 5 centavos.
$P(n) =$ a postagem de n centavos pode ser formada usando selos de 4 e 5 centavos, ou seja, existem inteiros a e b tal que $4a + 5b = n$.
Mostre que P(n) é válida para $n \geq 12$.

1. **Passo Base:** Para n=12, a postagem de 12 centavos pode ser formada 3 selos de 4 centavos e 0 selo de 5 centavos.
2. **Passo Indutivo:** Considere que, para algum $k \geq 12$, a postagem de k centavos pode ser formada usando selos de 4 e 5 centavos, ou seja, existem inteiros a e b tal que $4a + 5b = k$.

Postagem

Devemos mostrar que podemos formar uma postagem de $k+1$ centavos, ou seja, existem inteiros a' e b' tal que $k+1 = 4a' + 5b'$. Considere dois casos:

- Se $a \geq 1$: um selo de 4 centavos pode ser substituído por um selo de 5 centavos. Assim obtemos uma postagem de $k+1$ centavos com $a' = a-1$ e $b' = b+1$.

$$\begin{aligned} 4(a-1) + 5(b+1) &= 4a - 4 + 5b + 5 \\ &= k+1 \end{aligned} \tag{17}$$

- Se $a = 0$ então podemos garantir que a postagem possui pelos menos 3 selos de 5 centavos. Logo, podemos substituir 3 selos de 5 centavos por 4 selos de 4 centavos. Assim, obtemos uma postagem de $k+1$ centavos com $a' = a+4$ e $b' = b-3$.

$$\begin{aligned} 4(a+4) + 5(b-3) &= 4a + 16 + 5b - 15 \\ &= k+1 \end{aligned} \tag{18}$$

Princípio da Indução Forte

Definição

Seja $P(n)$ um predicado que é definido para inteiros n, e seja a e b inteiros fixos, sendo $a \leq b$. Suponha que as duas afirmações seguintes sejam verdadeiras:

1. $P(a), P(a+1), \ldots, P(b)$ *é verdadeiro (Passo Base)*
2. *Para todo $k \geq b$, se $P(a)$,$P(a+1)$,...,$P(k)$ são verdadeiros então $P(k+1)$ é verdadeiro.*

Este princípio da indução forte pode ser expresso pela seguinte regra de inferência:

$$[\bigwedge_{i=a}^{b} P(i) \wedge \forall k(\bigwedge_{i=a}^{k-1} P(i) \rightarrow P(k+1))] \rightarrow \forall n \geq a, P(n) \qquad (19)$$

Comentários:

- Em uma prova, por indução forte, nós assumimos que se a $P(i)$ é verdadeiro, para todo $a \leq i \leq k-1$ então $P(k+1)$ é verdadeiro.
- Na prova, por indução forte, devemos usar obrigatoriamente $P(i)$, para $a \leq i \leq k-1$.

Números Primos

Prove, por indução forte, que qualquer inteiro maior que 1 é divisível por um número primo.

1. **Passo Base:** Para $n = 2$, a propriedade é válida ja que $2|2$.
2. **Passo Indutivo:** Assuma que, para algum inteiro k, i é divisível por um primo, para $2 \leq i \leq k$. Vamos mostrar que $k + 1$ é divisível por um primo. Se $k + 1$ é primo então $k + 1$ é divisível por um primo (ele mesmo). Se $k + 1$ não primo então $k = a \cdot b$, onde a e b são inteiros tais que $2 \leq a \leq k$ e $2 \leq b \leq k$. Pela hipótese indutiva, a é divisível por um primo p. Pela transitividade da divisibilidade, k+1 é divisível por p

Relação de Recorrência

Seja a sequência $g_0, g_1, \ldots$ definida como

$$\begin{aligned} g_0 &= 12 \\ g_1 &= 29 \\ g_k &= 5g_{k-1} - 6g_{k-2} \end{aligned} \qquad (20)$$

Prove por indução matemática que $g_n = 5 \cdot 3^n + 7 \cdot 2^n$

1. **Passo Base:** Para $n = 0$, temos que $g_0 = 5 \cdot 3^0 + 7 \cdot 2^0 = 5 + 7 = 12$. Para $n = 1$, temos que $g_1 = 5 \cdot 3^1 + 7 \cdot 2^1 = 15 + 14 = 29$.
2. **Passo Indutivo:** Assuma, para algum inteiro k, $g_i = 5 \cdot 3^i + 7 \cdot 2^i$, para $1 \leq i \leq k$.

Relação de Recorrência

Vamos mostrar que $g_{k+1} = 5 \cdot 3^{k+1} + 7 \cdot 2^{k+1}$
Sabemos que

$$\begin{aligned}
g_{k+1} &= 5g_k - 6g_{k-1} \\
&= 5(5 \cdot 3^k + 7 \cdot 2^k) - 6(5 \cdot 3^{k-1} + 7 \cdot 2^{k-1}) \\
&= 25 \cdot 3^k + 35 \cdot 2^k - 30 \cdot 3^{k-1} - 42 \cdot 2^{k-1} \\
&= 25 \cdot 3^k + 35 \cdot 2^k - 30 \cdot 3^{k-1} - 42 \cdot 2^{k-1} \\
&= 75 \cdot 3^{k-1} + 70 \cdot 2^{k-1} - 30 \cdot 3^{k-1} - 42 \cdot 2^{k-1} \\
&= 45 \cdot 3^{k-1} + 28 \cdot 2^{k-1} \\
&= 5 \cdot 3^2 \cdot 3^{k-1} + 7 \cdot 2^2 \cdot 2^{k-1} \\
&= 5 \cdot 3^{k+1} + 7 \cdot 2^{k+1}
\end{aligned} \tag{21}$$

Postagem

Prove, por indução, que toda postagem de 18 centavos ou mais pode ser formada usando selos de 4 e 7 centavos.

1. **Passo Base:** Os seguintes valores podem ser formados usando selos de 4 e 7 centavos.

n	Selos
18	7+7+4
19	7+4+4+4
20	4+4+4+4+4
21	7 + 7 + 7

2. **Passo Indutivo:** Assuma, para algum inteiro k, a postagem i pode ser obtida usando selos de 4 e 7 centavos para todo $18 \leq i \leq k$, onde $k \geq 21$. Temos que mostrar que a postagem $k + 1$ pode ser formada usando selos de 4 e 7 centavos. Por hipótese de indução, podemos assumir que a postagem k-3 (k+1-4) pode ser formada usando os selos de 4 e 7 centavos uma vez que $k - 3 \geq 18$. Para formar a postagem de valor $k + 1$, basta adicionar um selo de 4 centavos na postagem k-3.

Ângulos Internos

Prove, por indução, que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados ($n \geq 3$) é igual a $S(n) = (n-2) \cdot 180$.

Passo Base: Temos que mostrar que a propriedade vale para um polígono de 3 lados.

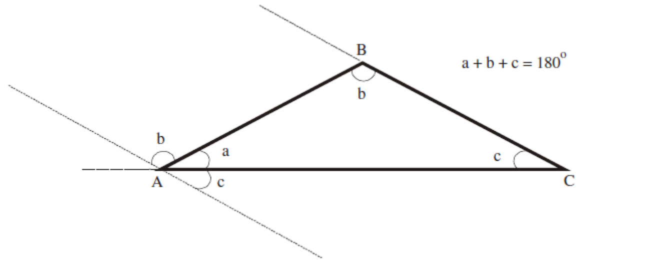

Figura: Propriedade válida para $n = 3$

Ângulos Internos

Passo Indutivo: Suponhamos que, para algum $k > 3$, a soma dos ângulos internos de um polígono de i lados seja $(i-2)\cdot 180$, para todo $3 \leq i \leq k$ (Hipótese de Indução). Vamos mostrar que a soma dos ângulos internos de polígono de $k+1$ é $(k+1-2)\cdot 180$. Considere um polígono de $k+1$ lados com vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}$. Se unirmos v_1 a v_i, teremos um polígono $v_1, v_2, \ldots, v_i$ de i lados e o polígono $v_1, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{k+1}$ de $k-i+3$ lados. Logo, a soma dos ângulos internos do polígono de $k+1$ lados é:

$$\begin{aligned}
S(k+1) &= S(i) + S(k-i+3) \\
S(k+1) &= (i-2)\cdot 180 + (k-i+3-2)\cdot 180 \\
S(k+1) &= (i-2+k-i+3-2)\cdot 180 \\
S(k+1) &= (k+1-2)\cdot 180
\end{aligned} \tag{22}$$