Sequência e Somatórios

Wladimir Araújo Tavares [1]

[1]Universidade Federal do Ceará - Campus de Quixadá

31 de outubro de 2016

Sequencia e Somatórios

1. Representar soluções de certos problemas de contagem.
2. Ferramenta importante para a análise de algoritmos.

Sequência

Definição

Uma sequência é uma função de um subconjunto dos inteiros (usualmente o conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$)para um conjunto S. A notação a_n representa um termo da sequência, imagem do inteiro n.

Exemplo

Considere a sequência $\{a_n\}$, onde

$$a_n = \frac{1}{n}$$

A lista de termos desta sequência começando com a_1:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Exemplo

Encontre os termos da sequência $\{a_n\}$, *onde* $a_n = 2 \cdot (-3)^n + 5^n$*:*

1. $a_0 = 2(-3)^0 + 5^0 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

Exemplo

Encontre os termos da sequência $\{a_n\}$*, onde* $a_n = 2 \cdot (-3)^n + 5^n$*:*

1. $a_0 = 2(-3)^0 + 5^0 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$
2. $a_1 = 2(-3)^1 + 5^1 = 2 \cdot (-3) + 5 = -1$

Exemplo

Encontre os termos da sequência $\{a_n\}$, *onde* $a_n = 2 \cdot (-3)^n + 5^n$*:*

1. $a_0 = 2(-3)^0 + 5^0 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$
2. $a_1 = 2(-3)^1 + 5^1 = 2 \cdot (-3) + 5 = -1$
3. $a_2 = 2(-3)^2 + 5^2 = 2 \cdot 9 + 25 = 43$

Definição

A progressão geométrica é uma sequência da forma

$$a, ar, ar^2, \ldots, ar^n, \ldots \tag{1}$$

onde o termo inicial a e a razão r são números reais.

Exemplo

A sequência $\{b_n\}$ *com* $b_n = (-1)^n$, $\{c_n\}$, *com* $c_n = 2 \cdot 5^n$ *e* $\{d_n\}$ *com* $d_n = 6 \cdot (\frac{1}{3})^n$ *são progressões geométricas com termo inicial e razão iguais a 1 e -1; 2 e 5; e 6 e* $\frac{1}{3}$.

Definição

Uma progressão aritmética é uma sequência da forma

$$a, a+d, a+2d, \ldots, a+nd, \ldots \tag{2}$$

onde o termo inicial a e a razão d são números reais.

Exemplo

A sequência $\{s_n\}$ *com* $s_n = -1 + 4n$ *e* $t_n = 7 - 3n$ *são progressões aritméticas com termo inicial e razão -1 e 4; 7 e -3.*

Definição

Uma relação de recorrência para uma sequência $\{a_n\}$ *é uma equação que expressa* a_n *em termos de um ou mais termos anteriores da sequência, a saber* $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, *para todos os inteiros* n *com* $n \geq n_0$, *onde* n_0 *é um inteiro não negativos. Uma sequência é dita uma solução de uma relação de recorrência se seus termos satisfazem a relação de recorrência.*

Example

Seja $\{a_n\}$ uma sequência que satisfaz a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para $n = 1, 2, \ldots$ e suponha que $a_0 = 2$. Descubra a_1, a_2 e a_3?

- $a_1 = a_0 + 3 = 2 + 3 = 5$
- $a_2 = a_1 + 3 = 5 + 3 = 8$
- $a_3 = a_2 + 3 = 8 + 3 = 11$

A solução dessa relação de recorrência é a sequência $a_n = 2 + 3n$

Example

Seja $\{a_n\}$ uma sequência que satisfaz a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1}$ para $n = 1, 2, \ldots$ e suponha que $a_0 = 1$. Descubra a_1, a_2 e a_3?

- $a_1 = 2a_0 = 2 \cdot 1 = 2$
- $a_2 = 2a_1 = 2 \cdot 2 = 4$
- $a_3 = 2a_2 = 2 \cdot 4 = 8$

A solução dessa relação de recorrência é a sequência $a_n = 2^n$

Exemplo

Determine se a sequência $\{a_n\}$*, onde* $a_n = 3n$ *para todo inteiro não negativo* n *é uma solução da relação de recorrência*

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2}, \text{ para } n \geq 2$$

Suponha que $a_n = 3n$ *para* $n \geq 0$*. Então, para* $n \geq 2$*, temos que* $2a_{n-1} - a_{n-2} = 2(3(n-1)) - 3(n-2) = 6n - 6 - 3n + 6 = 3n = a_n$*. Portanto,* $\{a_n\}$*, onde* $a_n = 3n$ *é uma solução da relação de recorrência.*

Exemplo

Determine se a sequência $\{a_n\}$, *onde* $a_n = 5$ *para todo inteiro não negativo* n *é uma solução da relação de recorrência*

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2}, \text{ para } n \geq 2$$

Suponha que $a_n = 5$ *para* $n \geq 0$. *Então, para* $n \geq 2$, *temos que* $2a_{n-1} - a_{n-2} = 2 \cdot 5 - 5 = 10 - 5 = 5 = a_n$. *Portanto,* $\{a_n\}$, *onde* $a_n = 5$ *é uma solução da relação de recorrência.*

Exemplo

Resolva a relação de equação $a_n = a_{n-1} + 3$*, para* $n \geq 1$ *e* $a_0 = 2$*.*

Método 1 (Forward Substitution):

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2+3 \\
a_2 &= (2+3)+3 &&= 2+3\cdot 2 \\
a_3 &= (2+2\cdot 3)+3 &&= 2+3\cdot 3 \\
&\vdots \\
a_n &= (2+(n-1)\cdot 3)+3 &&= 2+3\cdot n
\end{aligned}$$

Exemplo

Resolva a relação de equação $a_n = a_{n-1} + 3$, *para* $n \geq 1$ *e* $a_0 = 2$.

Método 2 (Backward Substitution):

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + 3 \\
&= ((a_{n-2}) + 3) + 3 &&= a_{n-2} + 3 \cdot 2 \\
&= (a_{n-3} + 3) + 3 \cdot 2 &&= a_{n-3} + 3 \cdot 3 \\
&\vdots \\
&= a_{n-k} + 3k
\end{aligned}
$$

Faça $n - k = 0$. *Logo,* $k = n$

$$a_n = a_0 + 3n = 2 + 3n$$

Definição

A notação $\sum_{j=m}^{n} a_j$ *representa*

$$a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n \tag{3}$$

A variável j é chamada de índice do somatório. O índice do somatório percorre todos os inteiros começando com seu limite inferior m e terminando com o seu limite superior n.

Exemplo

Qual é o valor de $\sum_{j=1}^{5} j^2$*?*

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{5} j^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2\\ &= 1 + 4 + 9 + 16 + 25\\ &= 55\end{aligned}$$

Propriedades do somatórios:

1. $\sum_{i=m}^{n} \mathcal{C} = (n - m + 1)\mathcal{C}$, onde $\mathcal{C}$ é uma constante. Caso especial: $m = 1$, $\sum_{i=1}^{n} \mathcal{C} = n\mathcal{C}$.
2. $\sum_{i=1}^{n} (a_i x_i + b_i y_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n} b_i y_i$.
3. $\sum_{i=1}^{n} \mathcal{C} x_i = \mathcal{C} \sum_{i=1}^{n} x_i$.
4. $\sum_{i=k}^{n} a_i x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i$.

Propriedades do somatórios:

1. $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ (Mudança de índice).
2. $\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} x_{k+1} = \sum_{i=2}^{n+1} a_i x_i$ (Mudança do domínio do índice).

Exemplo

Somatórios simples:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} 1 &= n \\
\sum_{k=1}^{n} k &= \frac{n(n+1)}{2} \\
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

Teorema

Mostre que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Demonstração.

Considere que $S_n = \sum_{i=1}^{n} i$:

$$
\begin{aligned}
2S_n &= \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} i \\
&= \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} (n - i + 1) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i + n - i + 1 \\
&= \sum_{i=1}^{n} n + 1 \\
&= n(n+1) \\
S_n &= \tfrac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}
$$

$\square$

Teorema

Mostre que $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

Demonstração.

Considere que $S_n = \sum_{i=0}^{n} 2^i$:

$$
\begin{aligned}
2S_n &= 2\sum_{i=0}^{n} 2^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} 2^{i+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} 2^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{n+1} - 2^0 \\
&= S_n + 2^{n+1} - 2^0 \\
2S_n - S_n &= 2^{n+1} - 1
\end{aligned}
$$

□

Teorema

Mostre que $\sum_{k=1}^{n} x_{k+1} - x_k = x_{n+1} - x_1$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} x_{k+1} - x_k &= \sum_{k=1}^{n} x_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} x_k \\
&= \sum_{i=2}^{n+1} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \\
&= x_{n+1} + \sum_{i=2}^{n} x_i - x_1 - \sum_{i=2}^{n} x_i \\
&= x_{n+1} - x_1
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema

Mostre que $\sum_{k=1}^{n} 2k - 1 = n^2$

Demonstração.

Como $k^2 - (k-1)^2 = 2k - 1$, temos que:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} 2k - 1 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 - (k-1)^2 \\ &= n^2\end{aligned}$$

$\square$

Exercícios

Usando o método da substituição, encontre a solução para a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_n &= a_{n-1} + 1, n \geq 1 \end{aligned}$$

Método da Substituição:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 1 \\ &= ((a_{n-2}) + 1) + 1 &= a_{n-2} + \sum_{i=1}^{2} 1 \\ &= ((a_{n-3} + 1) + 1) + 1 &= a_{n-3} + \sum_{i=1}^{3} 1 \\ &\vdots \\ &= a_{n-k} + \sum_{i=1}^{k} 1 \end{aligned}$$

Faça $n - k = 0$. Logo, $k = n$

$$a_n = a_0 + \sum_{i=1}^{n} 1 = 1 + n$$

Exercício

Exemplo

Quantas vezes a comparação $A[i] > A[j]$ é realizada?

```
for(int i = 1; i <=n; i++)
    for(int j = i + 1; j <=n; j++)
        if( A[i] > A[j])
            troque A[i] e A[j]
```

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} 1 &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} n-(i+1)+1 \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} n-i \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} n-\sum_{i=1}^{n} i \\
&= n^2-\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n^2-n}{2}
\end{aligned}
$$

Exercicio

Exemplo

Considere o seguinte trecho de código:

```
prog1(int n){
     if(n==1){
          printf("oi");
          return;
     }else{
     for(i=1;i<=n;i++)
          printf("oi");
          prog1(n-1);
     }
}
```

A relação de recorrência que determina o número de vezes que a palavra oi é impressa:

$$
\begin{aligned}
T(1) &= 1 \\
T(n) &= T(n-1) + n, \forall n \geq 1
\end{aligned}
$$

Exercício

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= T(n-1) + n, \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

Método da Substituição:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + n \\ &= (T(n-2) + n - 1) + n \\ &= ((T(n-3) + n - 2) + n - 1) + n \\ &\vdots \\ &= T(n-k) + \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} n - i \end{aligned}$$

Faça $n - k = 1$. Logo, $k = n - 1$

$$\begin{aligned} T(n) &= T(1) + \sum_{i=0}^{n-2} n - i && = 1 + \textstyle\sum_{i=0}^{n-2} n - \sum_{i=0}^{n-2} i \\ &= 1 + (n-1)n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} && = 1 + n^2 - n - \frac{n^2-3n+2}{2} \\ &= \frac{2+2n^2-2n-n^2+3n-2}{2} && = \frac{n^2+n}{2} \end{aligned}$$