

Revisitando modos normais de oscilações acopladas com a Teoria Espectral de Grafos

Revisiting normal modes of coupled oscillations with Spectral Graph Theory

Felipe Costa Melo Cunha¹, Ivan Guilhon², Samuel Madeiro Sampaio², Antônio José da Costa Sampaio³, and Rudini Menezes Sampaio^{*4}

¹Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Maranguape, CE, Brasil

²Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), São José dos Campos, SP, Brasil

³Universidade Federal do Ceará, Departamento de Física, Fortaleza, CE, Brasil

⁴Universidade Federal do Ceará, Departamento de Computação, Fortaleza, CE, Brasil

20 de maio de 2024

Resumo

O clássico livro de David Morin intitulado “*Introduction to Classical Mechanics*” de 2007, bem conhecido entre os estudantes de olimpíadas internacionais de Física, contém vários exercícios de oscilações acopladas que inspiraram problemas em provas recentes. Neste artigo, apresentamos esses problemas, incluindo soluções e simulações computacionais usando recursos avançados do Desmos, um sistema gráfico online e gratuito. Além disso, mostramos um modo geral mais didático de se compreender tais problemas, mesmo os mais complexos, combinando Álgebra Linear e Teoria dos Grafos.

*Endereço de correspondência: rudini@dc.ufc.br

Palavras-chaves: Mecânica, Oscilações acopladas, Autovalores, Autovetores, Física computacional.

The 2007 classic book by David Morin entitled “Introduction to Classical Mechanics”, well known among students of Physics Olympiads, contains many exercises of coupled oscillations that inspired problems in recent exams. In this paper, we present these problems, including their solutions and computational simulations using advanced features of Desmos, a free online graphics system. Moreover, we show a more didactic general way of handling such problems, even the most complex ones, using Linear Algebra and Graph Theory.

Keywords: Mechanics, Coupled oscillations, Eigenvalues, Eigenvectors, Computational physics, Graph Theory.

1 Introdução

Oscilações acopladas desempenham um papel fundamental em diversos campos da ciência. Sistemas físicos compostos de dois ou mais elementos oscilatórios que interagem entre si podem representar uma diversidade de fenômenos naturais e artefatos de engenharia. Esse assunto costuma ser ministrado em disciplinas introdutórias de mecânica, mas pode ser expandido para sistemas oscilatórios mais gerais.

Neste artigo, discutimos em detalhes diferentes problemas de oscilações mecânicas acopladas e como as frequências naturais de oscilação e seus respectivos modos normais dependem com respeito ao número de corpos. Como uma referência de problemas dessa natureza, adotamos o “*Introduction to Classical Mechanics*” [1], do professor David Morin. Trata-se de um excelente livro de mecânica clássica, muito recomendado tanto para cursos universitários de Física quanto para a preparação de estudantes de nível médio para olimpíadas internacionais de Física [2].

Oscilações Acopladas são abordadas no capítulo 4 desse livro. Esse tema constitui um desafio para muitos estudantes por exigir na maior parte dos casos a modelagem do sistema por meio de um sistema de equações diferenciais. A determinação simultânea da oscilação dos elementos do sistema está intimamente ligada a conceitos fundamentais de álgebra linear, a saber, diagonalização de matrizes, autovalores e autovetores. O exemplo mais comum é o sistema massa-mola com n blocos ligados por molas. Listamos a seguir algumas variantes interessantes desse problema:

- **Sistema massa-mola em círculo:** n blocos sobre uma superfície, ligados por molas formando um círculo (Figura 1(a)).
- **Sistema massa-mola aberto:** n blocos em linha reta ligados por molas sobre uma superfície, sem paredes (Figura 1(b)).

- **Sistema massa-mola com 2 paredes:** n blocos sobre uma superfície, com o primeiro e o último ligados com molas a paredes (Figura 1(c)).
- **Sistema massa-mola com 1 parede:** n blocos sobre uma superfície, com apenas o primeiro ligado com mola a uma parede (Figura 1(d)).
- **Sistema pêndulo-mola em círculo:** n pêndulos com blocos ligados por molas, formando um círculo (Figura 1(e)).
- **Sistema pêndulo-mola aberto:** n pêndulos com blocos ligados por molas, sem paredes (Figura 1(f)).
- **Sistema pêndulo-mola com 2 paredes:** n pêndulos com blocos ligados por molas, com o primeiro e o último ligados a paredes (Figura 1(g)).
- **Sistema pêndulo-mola com 1 parede:** n pêndulos com blocos ligados por molas, com apenas o primeiro ligado a uma parede (Figura 1(h)).

Em todas as situações desprezamos efeitos de atrito ou qualquer outra fonte de dissipação de energia mecânica. Considere também que os blocos são livres para se mover com apenas um grau de liberdade.

Geralmente, tais exercícios de oscilações acopladas pedem os *modos normais* do sistema, que consistem dos movimentos oscilatórios quando todos os blocos oscilam sempre com uma mesma frequência. As frequências de cada modo normal são chamadas de *frequências naturais* do sistema. Os livros didáticos de ciclo básico do ensino superior costumam apresentar tais problemas separadamente, fornecendo soluções particulares extensas [3], ou sequer mencionando o assunto de oscilações acopladas [4]. Poucos livros mais avançados apresentam uma abordagem de Álgebra Linear, envolvendo autovalores [5].

Neste artigo, estamos interessados em apresentar um método geral e mais didático para resolução de problemas desse tipo, combinando Álgebra Linear e Teoria dos Grafos. Não temos conhecimento de outra referência que utilize essa abordagem combinada. Na Seção 2, apresentamos as técnicas aplicadas ao longo do artigo. Na Subseção 2.1, mostramos um método geral de Álgebra Linear, fortemente baseado na diagonalização de matrizes, em autovalores e autovetores, que geralmente são difíceis de se obter. Na Subseção 2.2, mostramos uma forma de se modelar muitos sistemas de oscilações acopladas através da Teoria dos Grafos, o que permite aproveitar vários resultados conhecidos sobre autovalores e autovetores de matrizes especiais de certos grafos por meio da Teoria Espectral de Grafos. Por sua vez, na Subseção 2.3, apresentamos o software gráfico utilizado para a visualização dos modos normais de oscilação dos diferentes sistemas estudados [6]. Disponibilizamos

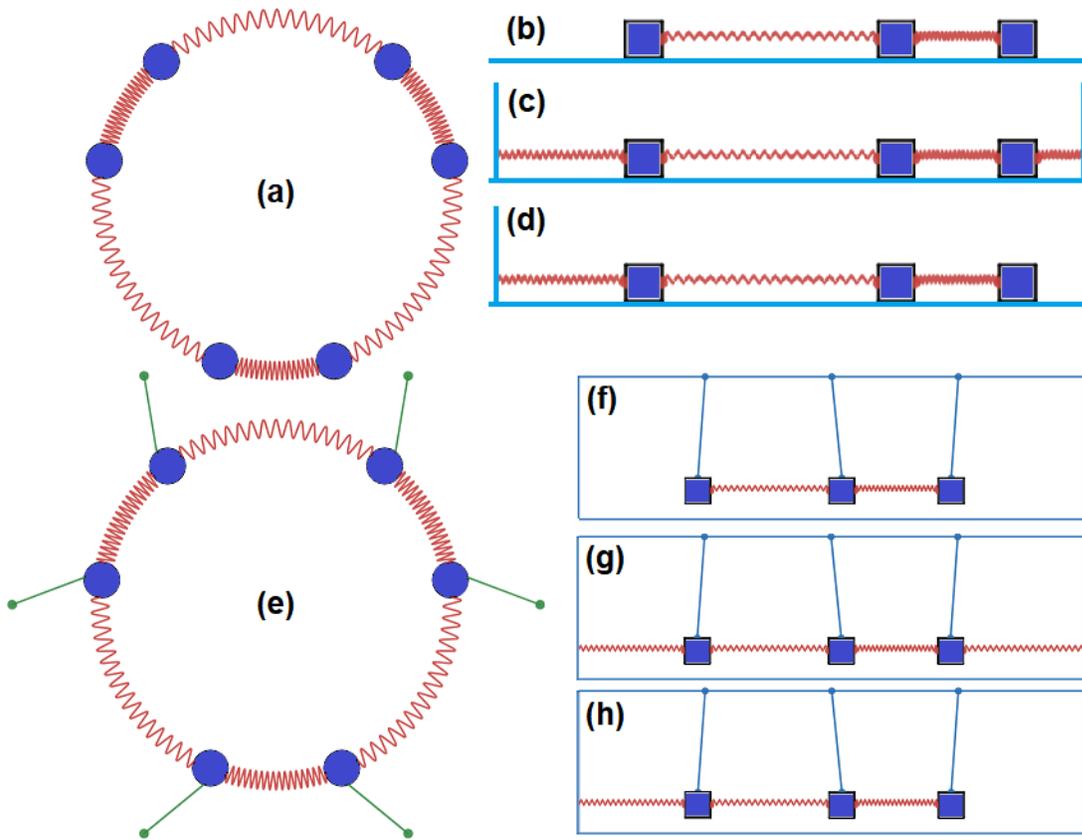


Figura 1: Exemplos de sistemas massa-mola com oscilações acopladas.

simulações computacionais para visualizar os modos normais de todos os sistemas apresentados neste artigo [7].

Na Seção 3, usamos essas técnicas para obter os modos normais dos sistemas supracitados, em sequência crescente de dificuldade, de modo que resultados de um sistema dependem de resultados dos sistemas vistos anteriormente. Analisamos primeiramente os sistemas sem pêndulos e, em seguida, demonstramos que o efeito dos pêndulos pode ser incluído mediante uma simples mudança de variável.

Na Seção 4, exploramos sistemas de cordas com massas oscilantes discretas, que recaem nas mesmas análises e matrizes dos sistemas massa-mola investigados. Finalmente, na Seção 5 oferecemos um sumário dos resultados obtidos e apresentamos nossas conclusões a respeito da metodologia apresentada ao longo deste artigo.

2 Metodologia

2.1 Análise matricial de oscilações acopladas

Uma das principais ferramentas usadas nesta seção vem da Álgebra Linear: a *diagonalização de matrizes*. A seguir, usaremos letras maiúsculas (Q e Z , por exemplo) para matrizes e letras minúsculas com índices ($q_{i,j}$ e z_i) para os elementos das matrizes. O termo *vetor* também será usado para se referir a matrizes coluna $n \times 1$. Uma matriz quadrada é *diagonal* se todos os elementos fora da diagonal principal são nulos. A matriz identidade I_n para $n \geq 1$ é a matriz diagonal $n \times n$ com todos os valores iguais a 1 na diagonal principal.

Dizemos que uma matriz Q quadrada $n \times n$ é *diagonalizável* se existem matrizes P e D quadradas $n \times n$ tais que $Q = P \cdot D \cdot P^{-1}$, onde D é uma matriz diagonal e P^{-1} é a inversa de P (ou seja, $P \cdot P^{-1} = I_n$). Os elementos de D (na diagonal principal) são chamados de *autovalores* de Q e são únicos. As colunas de P e seus múltiplos são *autovetores* de Q . Mais especificamente, dizemos que um número λ é um *autovalor* de Q se existe um vetor X (*autovetor* associado a λ) tal que $Q \cdot X = \lambda \cdot X$.

Um fato muito usado é que, se $Q = P \cdot D \cdot P^{-1}$ e $Q' = \alpha Q + \beta I_n$ para α e β reais, então $Q' = P \cdot (\alpha D + \beta I_n) \cdot P^{-1}$ e, portanto, os autovetores de Q' são os mesmos de Q e os seus autovalores podem ser expressos como $\lambda' = \alpha \lambda + \beta$.

Existem algoritmos eficientes para se obter a diagonalização de uma matriz, ou seja, dada a matriz Q , obter as matrizes P e D (diagonal) tais que $Q = P \cdot D \cdot P^{-1}$ [8, 9]. Por outro lado, dependendo do formato e simetria da matriz Q , é possível determinar teoricamente os autovalores e autovetores de Q , usando, por exemplo, a Teoria Espectral de Grafos, que será mencionada posteriormente.

Neste trabalho, estamos interessados em sistemas mecânicos oscilatórios, que podem ser matematicamente descritos por equações do tipo $\ddot{X} = -Q \cdot X$, em que X é um vetor coluna ($n \times 1$) e Q é uma matriz quadrada $n \times n$ diagonalizável ($Q = P \cdot D \cdot P^{-1}$). Note que sistemas desse tipo pode ser reescritos como

$$\ddot{X} = -Q \cdot X \quad \Rightarrow \quad \ddot{X} = -P \cdot D \cdot P^{-1} \cdot X$$

$$P^{-1} \cdot \ddot{X} = -D \cdot P^{-1} \cdot X. \quad (1)$$

Fazendo agora uma substituição de variáveis, tomando o vetor coluna $Z = P^{-1} \cdot X$, temos que $\ddot{Z} = P^{-1} \cdot \ddot{X}$ e portanto, da Eq. 1

$$\ddot{Z} = -D \cdot Z, \quad (2)$$

que consiste de n equações do tipo $\ddot{z}_i = -d_{i,i} \cdot z_i$, para $i = 1, \dots, n$, já que D é uma matriz diagonal. Esse processo é chamado de *desacoplamento* visto que as equações

iniciais do tipo $\ddot{x}_i = -\sum_{k=1}^n q_{i,k} \cdot x_k$ estão “*acopladas*” (ou seja, a equação para \ddot{x}_i não depende apenas de x_i), mas, nas equações finais do tipo $\ddot{z}_i = -d_{i,i} \cdot z_i$, temos que \ddot{z}_i depende apenas de z_i .

Veremos mais adiante que, nos sistemas em questão, os valores $d_{i,i}$ da matriz diagonal D são reais não-negativos. Além disso, podemos assumir que os valores $d_{i,i}$ estão ordenados: $d_{1,1} \leq \dots \leq d_{n,n}$. Para cada valor $d_{i,i}$ de D (autovalor de Q), faça $\omega_i = \sqrt{d_{i,i}}$. Portanto $\ddot{z}_i = -\omega_i^2 \cdot z_i$ é a equação de um MHS com frequência angular ω_i , cuja solução da função horária é bem conhecida, dada a posição inicial z_i e a velocidade inicial \dot{z}_i . Essas condições iniciais podem ser determinadas a partir das equações $Z = P^{-1} \cdot X$ e $\dot{Z} = P^{-1} \cdot \dot{X}$, dados os valores iniciais de X e \dot{X} (posições x_i e velocidades \dot{x}_i). Uma vez obtidas as funções horárias de Z , podemos obter as funções horárias de X pela equação $X = P \cdot Z$, ou seja, para $i = 1, \dots, n$,

$$x_i = \sum_{k=1}^n p_{i,k} \cdot z_k. \quad (3)$$

Por outro lado, podemos obter os modos normais de oscilação escolhendo adequadamente os valores iniciais de z_i e \dot{z}_i para todo i . Nesse sentido, seja $z_i = a_i \cdot \sin(\omega_i t)$, onde a_i é a amplitude do MHS de z_i , a ser definida posteriormente. Logo

$$x_i = \sum_{k=1}^n p_{i,k} \cdot a_k \cdot \sin(\omega_k t), \quad (4)$$

que consiste de uma combinação linear de movimentos MHS com frequências angulares $\omega_1 \leq \dots \leq \omega_n$, que são as *frequências naturais do sistema*. Isso porque, dado $1 \leq j \leq n$ e tomando $a_k = 0$ para todo k diferente de j , temos que $x_i = p_{i,j} \cdot a_j \cdot \sin(\omega_j t)$ para todo i , fazendo que todo x_i oscile com a mesma frequência angular ω_j , gerando assim um modo normal.

2.2 Aplicação de Teoria Espectral de Grafos

O modelo a seguir representa qualquer sistema massa-mola em que todos os blocos têm a mesma massa m e podem mover-se apenas sobre o eixo x do plano cartesiano, sem atrito e sem tombar, ligados entre si por molas. Os blocos são numerados de 1 a n . Para $i \neq j$, seja $k_{i,j}$ a constante elástica da mola ligando os blocos i e j (faça $k_{i,j} = 0$ se os blocos i e j não estão ligados). Ademais, para $i = 1, \dots, n$, o bloco i pode estar ligado a uma “parede” sobre o eixo x com uma mola de constante elástica $k_{i,i}$ (faça $k_{i,i} = 0$ se o bloco i não está ligado a uma parede). Além disso, considera-se pequenas oscilações a partir de uma configuração inicial de equilíbrio em que nenhuma mola esteja distendida.

A Figura 2 contém um diagrama de um sistema de 4 blocos e 6 molas, no qual os blocos 1 e 2 não se ligam ao bloco 4, e apenas os blocos 2 e 4 estão ligados a paredes. Segue, portanto, que $k_{1,4} = k_{2,4} = 0$ e $k_{1,1} = k_{3,3} = 0$.

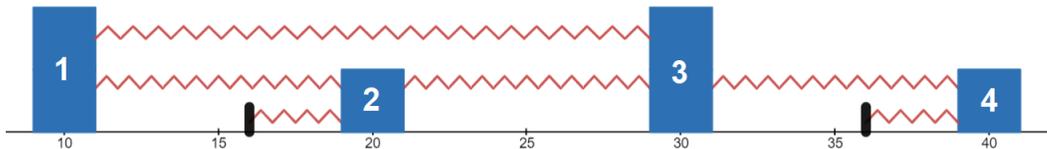


Figura 2: Exemplo do modelo geral de sistema massa-mola tratado neste artigo.

Esse modelo pode ser representado por um grafo, em que os blocos são representados por *vértices* e as molas são representadas por *arestas*. Grosso modo, um *grafo simples* é definido por um conjunto $V = \{1, \dots, n\}$ de vértices e um conjunto E de arestas, que são pares não-ordenados de vértices. Arestas de um vértice para si mesmo são chamadas de *laços*. Molas de um bloco para uma parede são representadas por laços. Em um *grafo ponderado*, há uma função que atribui um peso não-negativo a cada aresta: a constante elástica da mola associada. Na Figura 3 podemos observar o grafo associado ao sistema apresentado anteriormente.

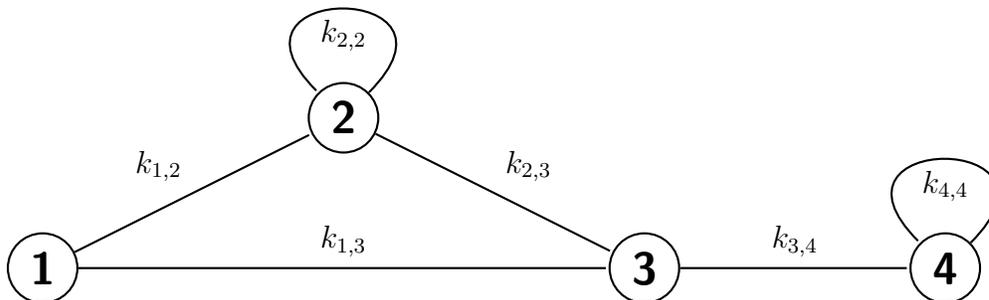


Figura 3: Grafo ponderado representando o sistema da Figura 2.

Há vários modos de se representar um grafo matricialmente. Entre eles, destacam-se a *matriz de adjacências* e a *matriz laplaciana* do grafo. A *matriz de adjacências* de um grafo ponderado é a matriz A tal que $A_{i,j}$ é o peso da aresta entre os vértices i e j (note que $A_{i,i} = 0$ se não há um laço no vértice i). A *matriz laplaciana* é a matriz L tal que $L_{i,i}$ é a soma dos pesos das arestas do vértice i (incluindo laços) e, para $i \neq j$, $L_{i,j}$ é -1 vezes o peso da aresta entre os vértices i e j . Note que a matriz laplaciana $L = G - A$, onde G (de grau) é a matriz diagonal tal que $G_{i,i}$ é a soma dos pesos das arestas do vértice i (laços são contados duas vezes).

Façamos aqui uma distinção importante. Podemos representar o modelo usando o grafo ponderado (com pesos nas arestas), bem como usando apenas o grafo simples (considerando peso 1 para todas as arestas). Usaremos L^* e A^* para as matrizes laplaciana e de adjacências do grafo ponderado, bem como L e A para as matrizes laplacianas e de adjacências do grafo simples. Note que A contém apenas 0 e 1 e que, para todo $1 \leq i \neq j \leq n$, temos que $L_{i,j} \in \{-1, 0\}$ e $L_{i,i}$ é o grau do vértice no grafo simples (número de arestas do vértice, onde laços são contados duas vezes).

Um fato importante é que as matrizes laplacianas são sempre *simétricas* e *diagonal-dominantes*, ou seja, $L_{i,j} = L_{j,i}$ e $|L_{i,i}| \geq \sum_{j \neq i} |L_{i,j}|$ para $1 \leq i \neq j \leq n$ (o mesmo para L^*). Além disso, nos grafos aqui considerados, L e L^* contém apenas valores reais não-negativos nas diagonais principais, o que implica pelo Teorema de Gershgorin que as matrizes laplacianas dos grafos obtidos desses modelos são *positivas semidefinidas*: todos os seus n autovalores são reais e não-negativos [10].

Seja x_i a diferença da posição do bloco i para sua posição de equilíbrio, para todo $i = 1, \dots, n$. Com isso, temos que, para todo bloco i

$$m \cdot \ddot{x}_i = -k_{i,i} \cdot x_i - \sum_{j=1}^n k_{i,j} \cdot (x_i - x_j)$$

que pode ser reescrito como

$$m \cdot \ddot{x}_i = - \left(\sum_{j=1}^n k_{i,j} \right) \cdot x_i + \sum_{j \neq i}^n (k_{i,j} \cdot x_j),$$

ou, em termos da matriz laplaciana L^* do grafo ponderado que representa o sistema massa-mola :

$$\ddot{x}_i = -\frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^n L_{i,j}^* \cdot x_j. \quad (5)$$

Com isso, vemos agora que as frequências naturais dos modos normais de oscilação acoplada do modelo geral do sistema massa-mola são iguais a $\sqrt{\lambda_i^*/m}$, em que λ_i^* são os autovalores da matriz laplaciana do grafo ponderado que representa o sistema. Assumindo que todas as molas tenham a mesma constante elástica k , podemos escrever

$$\ddot{x}_i = -\frac{k}{m} \cdot \sum_{j=1}^n L_{i,j} \cdot x_j, \quad (6)$$

onde L é a matriz laplaciana do grafo simples que representa o sistema massa-mola. Com essa simplificação, as frequências naturais correspondem a $\sqrt{k \cdot \lambda_i/m}$, em que λ_i são os autovalores da matriz laplaciana do grafo simples associado.

Além disso, muitas vezes o grafo simples em questão tem a propriedade de ser *d-regular* para algum inteiro $d \geq 2$, ou seja, todo vértice tem grau d . Como visto, a matriz laplaciana $L = G - A$, onde a matriz G de graus será $G = d \cdot I_n$. Nesse caso, os autovalores de L são iguais a d menos cada autovalor de A . Isso será usado nas próximas seções.

Existe um rico e vasto ramo da Teoria dos Grafos que estuda autovalores das matrizes laplacianas e de adjacências de grafos simples, como caminhos, ciclos, grafos completos e outras classes de grafos importantes. É a Teoria Espectral de Grafos, que será usada nos sistemas das próximas seções [11, 12].

2.3 Software Desmos

Para promover a melhor compreensão do comportamento qualitativo dos modos normais em relação a variação do número de massas e demais parâmetros físicos, recorreremos a simulações numéricas. Nesse artigo, usamos o Desmos, um software matemático online e gratuito que oferece uma variedade de recursos para visualização, cálculos e exploração de conceitos matemáticos que pode ser usado como poderosa ferramenta de ensino, tanto de matemática quanto de física [6, 13]. Os arquivos do Desmos com todas as simulações aqui citadas podem ser acessados livremente em um repositório [7], podendo ser editados livremente conforme a necessidade.

Com uma interface intuitiva e amigável, o Desmos permite que os usuários criem gráficos de funções e equações. O software oferece recursos mais avançados, como regressão linear, cálculos de áreas sob curvas e criação de animações interativas para demonstrar conceitos matemáticos complexos, o que foi extensivamente explorado neste trabalho. Nas nossas simulações, além de ferramentas elementares do Desmos, utilizamos a função relógio (*ticker*), ações (através do operador \rightarrow), objetos clicáveis, listas de tamanho variável e comandos como *if* e *for*.

As simulações no Desmos apresentaram quatro desafios técnicos que merecem menção e atenção do usuário com intenções de editar as simulações. O primeiro deles foi a generalização para qualquer número de blocos na oscilação, que foi resolvido com o uso de listas no Desmos. Por exemplo, a instrução $w = [\sqrt{i} \text{ for } i = [1 \dots n]]$ cria uma lista com valores de frequência angular $w[i] = \sqrt{i}$ para cada $1 \leq i \leq n$.

O segundo foi a atualização temporal da posição dos blocos durante a oscilação, que foi resolvido com o uso de ações no Desmos através do operador “ \rightarrow ”. Por exemplo, sendo X o vetor com as posições de cada bloco, a instrução $X \rightarrow [X[i] + d_X[i] \text{ for } i = [1 \dots n]]$ atualiza o vetor X temporalmente.

O terceiro desafio foi a sincronização ordenada dessas atualizações das posições, que foi possível com a inclusão do recurso *ticker* (*relógio*) do Desmos, que precisa ser acionado/desacionado para iniciar/pausar todas as atualizações.

O quarto desafio foi tornar a simulação amigável para pessoas não conhecedoras

dos recursos do Desmos, que foi possível com a inclusão de “*objetos clicáveis*”, tanto para a “Iniciar/Pausar” a oscilação, como para alterar o modo normal, ou aumentar a velocidade da simulação, com o objetivo de evitar que os usuários sejam obrigados a acionar/desacionar o relógio do Desmos ou alterar valores internos da simulação.

3 Resultados e Discussões

Nos sistemas das subseções seguintes, consideramos que todas os n blocos tem a mesma massa m e todas as molas têm a mesma constante elástica k . Em cada subseção, as notações L e A irão se referir às matrizes laplacianas e de adjacências do grafo simples do sistema em questão na subseção. Listaremos os modos normais em ordem crescente de suas frequências naturais. Para os sistemas massa-mola sem pêndulos, o modo normal 1 se refere ao de menor frequência natural positiva.

3.1 Sistema massa-mola circular

Considere inicialmente o sistema massa-mola circular da Figura 1(a) (sem paredes, nem pêndulos). Este é o único sistema que é resolvido na Ref. [1] para qualquer número de blocos. São obtidos apenas os autovalores (e conseqüentemente as frequências naturais), mas não os autovetores que caracterizam os modos normais de oscilação do sistema. Daremos uma solução diferente e completa, usando o método geral da Seção 2.1 e o modelo de grafos da Seção 2.2.

A princípio, pode parecer que esse sistema não se encaixa no modelo descrito na Seção 2.2, pois os blocos não estão em linha reta, mas em círculo. No entanto, é fácil verificar que esse sistema é equivalente ao sistema da Figura 4 abaixo, que se enquadra no nosso modelo.

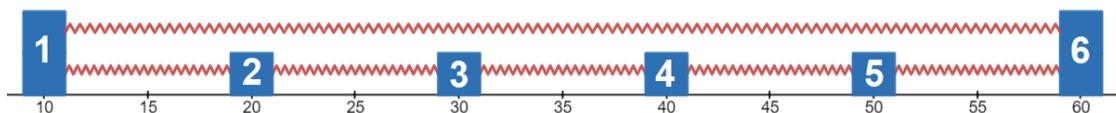


Figura 4: Representação do sistema circular da Figura 1(d) segundo o modelo da Seção 2.2.

Também é fácil ver que esse sistema é representado pelo grafo ciclo, denotado por C_n , que é o grafo simples com vértices $1, \dots, n$ e arestas entre os vértices i e $i + 1$ para todo $1 \leq i < n$ e entre 1 e n . As matrizes laplacianas L e de adjacências

A do grafo ciclo C_n são

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Note que toda linha de L soma zero e portanto $L \cdot v = 0$, onde v é o vetor com todos os valores iguais a 1. Ou seja, L sempre terá um autovalor nulo, o que na prática implica menos de n modos normais. O significado físico do autovalor nulo corresponde a possibilidade do sistema se deslocar em movimento uniforme, todos os blocos com a mesma velocidade, sem oscilação.

De modo geral, os grafos ciclo C_n são muito bem conhecidos e suas matrizes de adjacência possuem autovalores $\lambda_\ell = 2 \cdot \cos(2\pi\ell/n)$ para $0 \leq \ell < n$ e autovetores v' tais que $v'_j = \cos(2\pi j\ell/n)$ para $0 \leq j < n$. Ademais, vetores v'' tais que $v''_j = \sin(2\pi j\ell/n)$ para $0 \leq j < n$ também são autovetores.

Para provar isso, note que o ciclo C_n pode ser visto como a soma de dois ciclos direcionados, o primeiro de 1 a n voltando para 1, e o segundo de n para 1 voltando para n . Ou seja, a matriz A de adjacências de C_n é igual a $A = A' + A''$, onde todos os valores de A' e A'' são nulos, exceto $a'_{n,1} = 1$, $a'_{j,j+1} = 1$, $a''_{1,n} = 1$ e $a''_{j+1,j} = 1$ para $1 \leq j < n$. Note que o vetor $X = (1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1})$ satisfaz $A' \cdot X = \lambda \cdot X$ e $A'' \cdot X = \lambda^{-1} \cdot X$ se $\lambda^n = 1$, ou seja, λ é um número complexo $\lambda = e^{2\pi i\ell/n}$ para algum $0 \leq \ell < n$. Ou seja, A' e A'' tem os mesmos autovetores X para diferentes autovalores $e^{2\pi i\ell/n}$ e $e^{-2\pi i\ell/n}$. Logo A tem também os mesmos autovetores para cada autovalor $e^{2\pi i\ell/n} + e^{-2\pi i\ell/n} = 2 \cos(2\pi\ell/n)$ com $0 \leq \ell < n$. Além disso, como os autovalores são reais e A só contém números reais, temos que, se X é autovetor de A , então $Re(X)$ (tomando a parte real dos elementos, com cosseno) e $Im(X)$ (tomando a parte imaginária dos elementos, com seno) também são autovetores. Ou seja, para todo $0 \leq \ell < n$, $X' = (\dots, \cos(2\pi j\ell/n), \dots)$ e $X'' = (\dots, \sin(2\pi j\ell/n), \dots)$ também são autovetores, onde $0 \leq j < n$.

Disso concluímos que esse sistema contém na prática $\lfloor n/2 \rfloor$ modos normais, visto que $\cos(2\pi(n-\ell)/n) = \cos(2\pi\ell/n)$, com frequências naturais

$$\omega_{\ell, circular} = \sqrt{\frac{2k}{m} \cdot \left(1 - \cos\left(2\pi \cdot \frac{\ell}{n}\right)\right)}, \quad (8)$$

para $\ell = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$. Uma observação interessante é que a maior frequência natural possível é $2\sqrt{\frac{k}{m}}$, que só ocorre quando n é par. Outra observação é que, tomando

$k = m$, ocorre a frequência natural $\sqrt{3}$ para n múltiplo de 3, a frequência $\sqrt{2}$ para n múltiplo de 4 e a frequência $\sqrt{1}$ para n múltiplo de 6. Resumindo, temos as frequências naturais $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{4}$ para n múltiplo de 12.

Foram criados dois projetos no Desmos [7] para visualização dos modos normais desse sistema circular, um com desenho realmente circular e outro de acordo com o modelo equivalente ilustrado na Figura 4. Ambos permitem qualquer número de blocos, apesar de que um número excessivo de blocos deixa a simulação mais lenta.

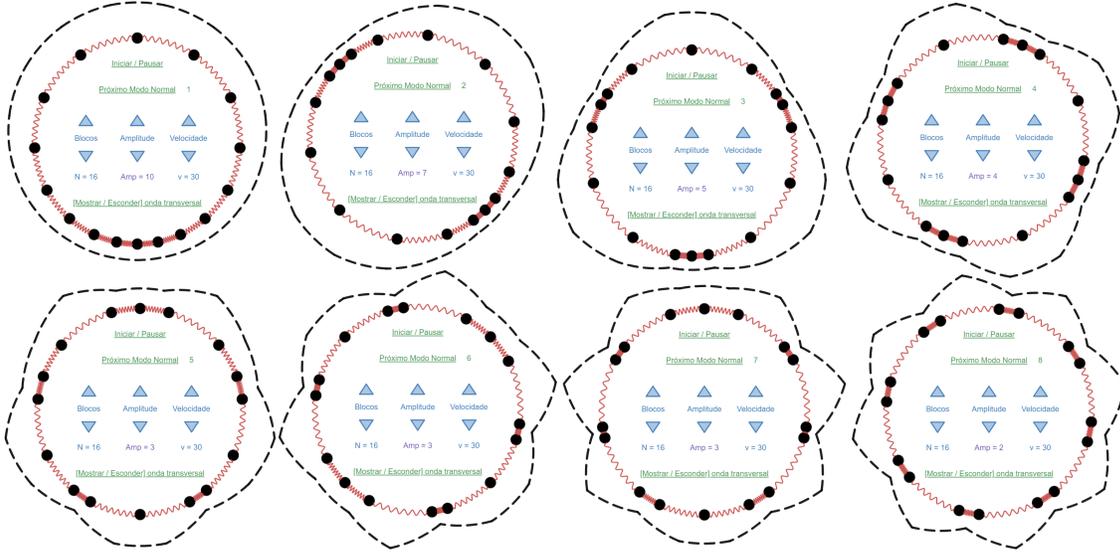


Figura 5: Os 8 modos normais do sistema circular com 16 blocos, mostrados na simulação do Desmos.

A Figura 5 mostra os 8 modos normais para o sistema com 16 blocos. Com um recurso adicional para visualização, destacando na linha tracejada as molas mais distendidas, percebemos uma imagem com ℓ “pontas” no ℓ -ésimo modo normal.

3.2 Sistema massa-mola reto sem paredes

Considere agora o sistema massa-mola da Figura 1(b) (sem paredes, nem pêndulos). É fácil ver que esse sistema é representado pelo grafo caminho, denotado por P_n , que é o grafo simples obtido do ciclo C_n removendo a aresta entre os vértices 1 e n .

As matrizes laplacianas L e de adjacências A do grafo caminho P_n são:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Note que toda linha de L também soma zero (como no C_n) e portanto $L \cdot v = 0$, onde v é o vetor com todos os valores iguais a 1. Ou seja, L sempre terá um autovalor nulo, o que na prática implica no máximo $n - 1$ modos normais, ao invés de n .

Assim como os grafos ciclo C_n , os grafos caminho P_n também são bem conhecidos. Sabe-se que os autovalores da matriz laplaciana de P_n são os mesmos da matriz laplaciana de C_{2n} , exceto o maior deles. Ou seja, os autovalores da laplaciana são $\lambda_\ell = 2 \cdot (1 - \cos(\pi\ell/n))$ para $0 \leq \ell < n$ e, portanto, as frequências naturais são

$$\omega_{\ell, \text{sem paredes}} = \sqrt{\frac{2k}{m} \cdot \left(1 - \cos\left(\pi \cdot \frac{\ell}{n}\right)\right)}, \quad (10)$$

com autovetores v tais que $v_j = \cos\left((j - \frac{1}{2}) \cdot \pi\ell/n\right)$ para $0 \leq j < n$.

Para verificar isso, note que toda oscilação do sistema reto com n blocos implica em uma oscilação do sistema circular com $2n$ blocos onde os blocos j e $2n + 1 - j$ oscilam igualmente ($j = 1, \dots, n$) e as molas entre os blocos 1 e $2n$ e os blocos n e $n + 1$ não se distendem. Com isso, dos n modos normais do sistema circular com $2n$ blocos, apenas o de maior frequência não pode ser obtido de uma oscilação do sistema reto com n blocos.

Mais formalmente, o caminho P_n pode ser visto como um grafo reduzido do ciclo C_{2n} em que se identificam (ou contraem) os vértices j e $2n + 1 - j$ para todo $j = 1, \dots, 2n$. Desse modo, tomando autovetores v de C_{2n} em que $v_j = v_{2n+1-j}$ para todo j obtemos o autovetor $v[1 \dots n]$ de P_n para o mesmo autovalor. Como vimos na seção anterior, tanto os vetores v' e v'' tais que $v'_j = \cos(\pi j\ell/n)$ e $v''_j = \sin(\pi j\ell/n)$ são autovetores de C_{2n} para o ℓ -ésimo autovalor. Com isso, o vetor v tal que $v_j = \cos(\pi(j - \frac{1}{2})\ell/n)$ para todo $j = 1, \dots, 2n$ é uma combinação linear de v' e v'' , portanto também um autovetor para o mesmo autovalor, satisfazendo $v_j = v_{2n+1-j}$ para todo j .

A Figura 6 mostra os 4 modos normais para o sistema com $n = 5$ blocos. Com um recurso adicional para visualização, destacando na linha preta o desvio de cada bloco de sua posição de equilíbrio, percebemos uma imagem com $\ell + 1$ “pontas” no ℓ -ésimo modo normal, para $1 \leq \ell < n$.

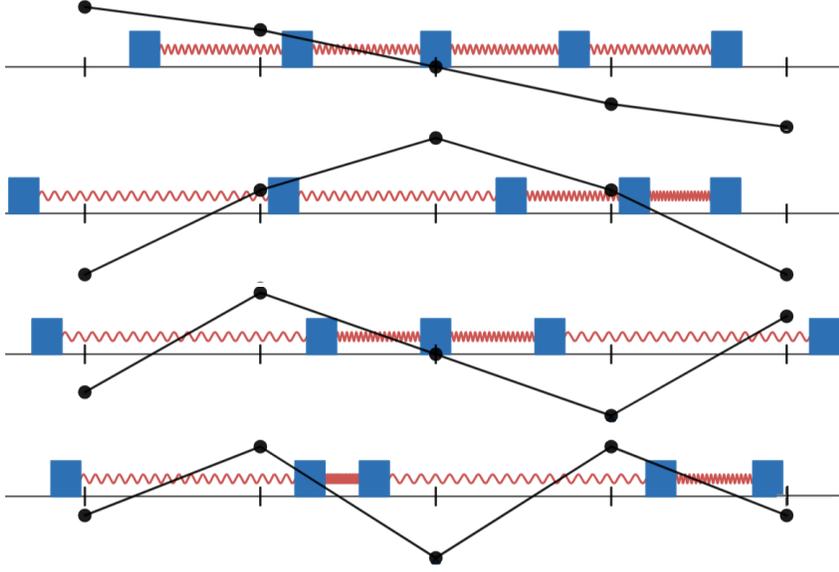


Figura 6: Os 4 modos normais do sistema reto de 5 blocos sem paredes, mostrados na simulação do Desmos.

Uma observação interessante é que, nos modos ímpares quando n é ímpar (primeiro e terceiro modo normal da Figura 6 por exemplo), o bloco do meio $j = (n+1)/2$ fica sempre parado, fato que pode ser provado facilmente devido ao valor v_j do autovetor, que é sempre zero. Esse fato será mencionado na Subseção 3.4 como uma forma de se obter os autovalores e autovetores do sistema com 1 parede, dado que o bloco do meio estando parado pode representar uma parede.

3.3 Sistema massa-mola com 2 paredes

Considere agora o sistema massa-mola da Figura 1(c) (com 2 paredes, sem pêndulos). É fácil ver que esse sistema é representado pelo grafo $P_n^{(2)}$, que é o grafo simples obtido do caminho P_n adicionando 2 laços, um no vértice 1 e outro no vértice n . As matrizes laplacianas L e de adjacências A do grafo $P_n^{(2)}$ são:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Um fato interessante é que as n frequências naturais desse sistema de n blocos com 2 paredes são as mesmas do sistema de $n + 1$ blocos sem paredes, visto na seção anterior. Ou seja, os autovalores da laplaciana de $P_n^{(2)}$ são os mesmos de P_{n+1} com exceção do zero. Isso porque é possível associar a elongação (ou deformação) de cada uma das $n + 1$ molas do sistema de n blocos com 2 paredes ao desvio de cada um dos n blocos de um sistema sem paredes.

Para verificar isso, seja y_j a elongação (ou deformação) da mola j , onde as molas são numeradas de 0 a n , sendo a mola 0 antes do bloco 1 e a mola j depois do bloco j para $j = 1, \dots, n$. Logo $y_0 = x_1$, $y_n = -x_n$ e $y_j = x_{j+1} - x_j$. Com isso,

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 &= \ddot{x}_1 = -\frac{k}{m} \cdot (2x_1 - x_2) = -\frac{k}{m} \cdot (y_0 - y_1) \\ \ddot{y}_n &= -\ddot{x}_n = +\frac{k}{m} \cdot (2x_n - x_{n-1}) = -\frac{k}{m} \cdot (y_n - y_{n-1}) \\ \ddot{y}_j &= -\frac{k}{m} \cdot (2y_j - y_{j-1} - y_{j+1}) \end{aligned} \quad (12)$$

para $1 < j < n$. Note que essas $n + 1$ equações em y sobre as elongações das molas desta seção são as mesmas equações em x dos desvios dos blocos no sistema com n blocos sem paredes, da seção anterior. Com isso, as frequências naturais de oscilação das molas são as mesmas da seção anterior, como mencionado.

Ou seja, os autovalores da laplaciana de $P_n^{(2)}$ são $2 \cdot (1 - \cos(\pi\ell/(n + 1)))$ para $1 \leq \ell \leq n$ e as frequências naturais são

$$\omega_{\ell, 2\text{paredes}} = \sqrt{\frac{2k}{m} \cdot \left(1 - \cos\left(\pi \cdot \frac{\ell}{n + 1}\right)\right)}. \quad (13)$$

Além disso, note que para $j = 1, \dots, n$

$$x_j = \sum_{b=0}^j y_b. \quad (14)$$

Com isso, para cada autovalor $\lambda > 0$ com autovetor v da laplaciana de P_{n+1} , temos o mesmo autovalor $\lambda > 0$ para a laplaciana $P_n^{(2)}$ com autovetor v' tal que $v'_j = \sum_{b=1}^j v_b$ para $j = 1, \dots, n$. Ou seja, o ℓ -ésimo autovetor da laplaciana de $P_n^{(2)}$ é o vetor v' tal que

$$v'_j = \sum_{b=1}^j \cos\left(\frac{\pi\ell}{n + 1} \cdot \left(b - \frac{1}{2}\right)\right). \quad (15)$$

Esse somatório pode ser resolvido usando a Fórmula de Euler dos números complexos: $e^{i\theta} = \cos\theta + i \cdot \sin\theta$. Como a parte real $Re(e^{i\theta}) = \cos\theta$, então obtemos a seguinte soma de uma progressão geométrica:

$$v'_j = Re \left(\sum_{b=1}^j \exp \left(i \frac{\pi\ell}{n+1} \left(b - \frac{1}{2} \right) \right) \right) = \frac{\cos \left(\frac{\pi\ell}{n+1} \left(j - \frac{1}{2} \right) \right) - \cos \left(\frac{\pi\ell}{n+1} \left(j + \frac{1}{2} \right) \right)}{2 - 2 \cos \left(\frac{\pi\ell}{n+1} \right)}$$

$$\Rightarrow v'_j = \frac{2 \sin \left(\frac{\pi j \ell}{n+1} \right) \sin \left(\frac{\pi \ell / 2}{n+1} \right)}{2 - 2 \cos \left(\frac{\pi \ell}{n+1} \right)} \quad (16)$$

Desconsiderando constantes multiplicativas para ℓ fixo, obtemos o autovetor v'' abaixo para o ℓ -ésimo autovalor:

$$v''_j = \sin \left(\frac{\pi j \ell}{n+1} \right). \quad (17)$$

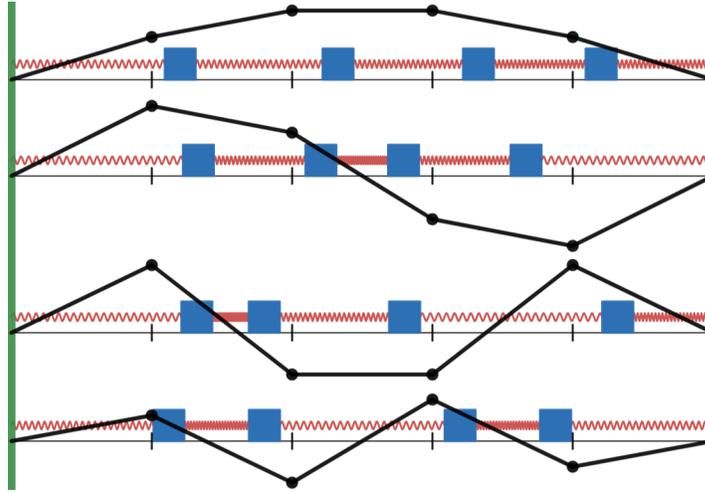


Figura 7: Os 4 modos normais do sistema reto de 4 blocos com 2 paredes, mostrados na simulação do Desmos.

A Figura 7 mostra os 4 modos normais para o sistema de 4 blocos com 2 paredes. Com um recurso adicional para visualização, destacando na linha preta o desvio de cada bloco de sua posição de equilíbrio, percebemos uma imagem com ℓ “pontas” no ℓ -ésimo modo normal.

Uma observação interessante é que, nos modos ímpares quando n é par (primeiro e terceiro modo normal da Figura 7 por exemplo), a mola do meio, entre os blocos

j e $j + 1$ para $j = \frac{n}{2}$ nunca se distende, fato que pode ser provado facilmente já que $v_j = v_{j+1}$ sempre nesse caso. Esse fato será usado na Subseção 3.4 para se obter os autovalores e autovetores do sistema com 1 parede, dado que, quando a mola do meio não distende, é como se tivéssemos dois sistema independentes com 1 parede e metade dos blocos.

3.4 Sistema massa-mola com 1 parede

Considere agora o sistema massa-mola da Figura 1(d) (com 1 parede, sem pêndulo). É fácil ver que esse sistema é representado pelo grafo $P_n^{(1)}$, que é o grafo simples obtido do caminho P_n adicionando 1 laço no vértice 1. As matrizes laplacianas L e de adjacências A do grafo $P_n^{(1)}$ são:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Um fato interessante é que as n frequências naturais desse sistema de n blocos com 1 parede estão contidas nas $2n$ frequências naturais do sistema de $2n$ blocos com 2 paredes. Isso porque, para cada modo normal do primeiro, podemos obter um modo normal do segundo, casando as oscilações de modo que a mola do meio (entre os blocos n e $n + 1$) não se distende.

Outro fato interessante é que as n frequências naturais do sistema de n blocos com 1 parede estão contidas nas $2n$ frequências naturais do sistema de $2n + 1$ blocos sem paredes. Isso porque, para cada modo normal do primeiro, podemos obter um modo normal do segundo, fazendo que o bloco central ($n + 1$) fique parado e tanto os n blocos à esquerda como os n blocos à direita oscilem igualmente como no sistema de n blocos com 1 parede. Esses dois fatos estão ilustrados na Figura 8: um modo normal do sistema de 3 blocos com 1 parede ocorrendo tanto no sistema de 6 blocos com 2 paredes como no sistema de 7 blocos sem paredes.

Para descobrir seus valores, basta observar os autovetores do sistema de $2n$ blocos com 2 paredes (Seção 3.3) nos quais a n -ésima coordenada é igual a $(n + 1)$ -ésima coordenada (blocos n e $n + 1$ com a mesma oscilação). Vimos na Seção 3.3 o autovalor $2 \cdot (1 - \cos(\pi\ell'/(2n + 1)))$ e o autovetor v'' com valores $v''_j = \sin(\pi j\ell'/(2n + 1))$ para cada $\ell' = 1, \dots, 2n$. É fácil ver que $v''_n = v''_{n+1}$ se e só se ℓ' é ímpar.

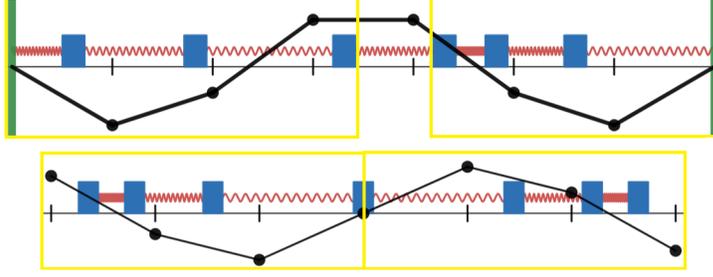


Figura 8: Modo normal de 3 blocos com 1 parede (retângulos em amarelo) aparecendo tanto no sistema de 6 blocos com 2 paredes como no de 7 blocos sem paredes.

Com isso, para $\ell = 1, \dots, n$ e tomando $\ell' = 2\ell - 1$ ímpar, temos para a matriz laplaciana de $P_n^{(1)}$ o autovalor $2 \cdot \left(1 - \cos\left(\pi \cdot \frac{2\ell-1}{2n+1}\right)\right)$ e o autovetor v com valores $v_j = \sin\left(\pi j \cdot \frac{2\ell-1}{2n+1}\right)$. Logo temos para $\ell = 1, \dots, n$ as frequências naturais

$$\omega_{\ell,1\text{parede}} = \sqrt{\frac{2k}{m} \cdot \left(1 - \cos\left(\pi \cdot \frac{2\ell-1}{2n+1}\right)\right)} \quad (19)$$

do sistema de n blocos com 1 parede.

Resultados idênticos seriam obtidos alternativamente analisando o sistema de $2n + 1$ blocos sem paredes. Foram realizadas simulações no Desmos, possibilitando comparar como realmente estão associados os modos normais do sistema de n blocos com 1 parede com os modos normais ímpares do sistema de $2n$ blocos com 2 paredes e do sistema de $2n + 1$ blocos sem paredes.

3.5 Sistemas massa-mola com pêndulos

Considere agora os sistemas da Figura 1 com pêndulos, onde assumimos que todos os pêndulos tem o mesmo comprimento ℓ . Ver Figuras 1 (e,f,g,h) e Figura 9. Assumindo pequenas oscilações, podemos considerar que os blocos estão sobre o eixo x do plano cartesiano (sem contato com o chão). Quando o pêndulo i está com ângulo θ_i muito pequeno com a vertical, temos que a componente do peso na direção do movimento é sempre contrária ao movimento, com valor $m \cdot g \cdot \sin \theta_i \approx m \cdot g \cdot x_i / \ell$. Com isso, todas as equações do sistema em questão sobre \ddot{x}_i terão um fator $-g \cdot x_i / \ell$ em comparação com os sistemas correspondentes sem pêndulos, vistos nas seções anteriores.

Também podemos enquadrar esses sistemas com pêndulos no modelo de grafos visto na Seção 2.2, fazendo cada bloco ligado a uma parede por uma mola com constante elástica $k' = m \cdot g / \ell$. Assim, esses sistemas com pêndulos podem ser representados por grafos ponderados, onde cada vértice tem um laço adicional com peso $m \cdot g / \ell$ e as demais arestas tem peso k (representando as molas).

Com isso, temos que os autovetores dos sistemas com pêndulos são os mesmos dos sistemas correspondentes sem pêndulos e que os autovalores são os mesmos mais g/ℓ . Por exemplo, para um autovalor λ de um sistema sem pêndulos, temos a frequência natural $\sqrt{\frac{k}{m} \cdot \lambda}$, enquanto temos a frequência natural $\sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{k}{m} \cdot \lambda}$ no sistema correspondente com pêndulos.

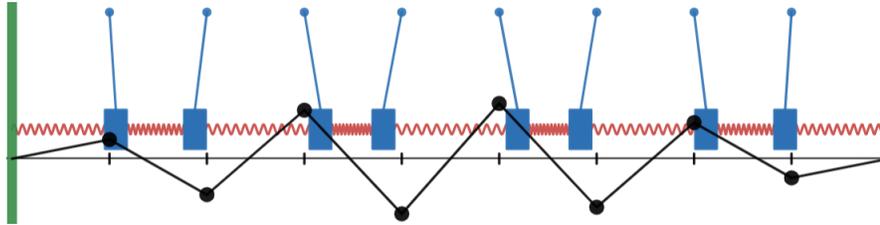


Figura 9: Modo normal de maior frequência do sistema reto de 8 blocos/pêndulos com 2 paredes, mostrados no Desmos: o oitavo modo normal.

4 Aplicações para sistemas de cordas vibrantes

Considere agora o sistema de uma corda com n blocos amarrados separados à distância ℓ (Figura 10), sobre o plano horizontal sem atrito. Esse sistema possui variantes semelhantes aos dos sistemas massa-mola, dependendo se as pontas da corda estão fixas em um ponto ou livres sobre uma reta. Considerando pequenas oscilações, podemos assumir que a tensão da corda nos blocos é sempre a mesma, cujo valor será denotado por T .

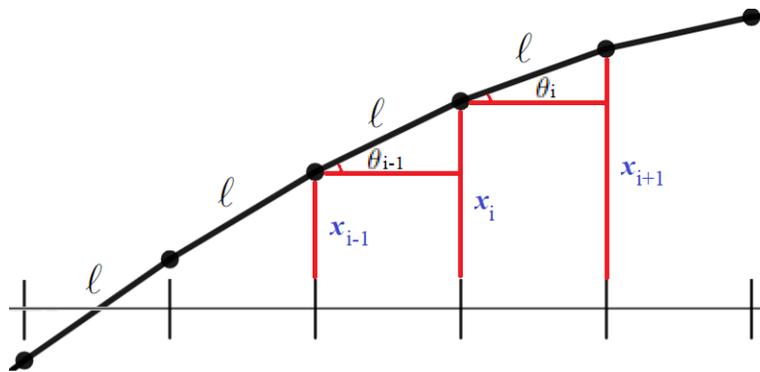


Figura 10: Sistema de cordas com n blocos equidistantes com mesma massa m .

Portanto: $m_i \cdot \ddot{x}_i = -T \sin \theta_{i-1} + T \sin \theta_i$ para $1 < i < n$. Como $\sin \theta_i =$

$(x_{i+1} - x_i)/\ell$, temos o seguinte, tomando todas as massas iguais:

$$\ddot{x}_i = -\frac{T}{m \cdot \ell} \cdot (2x_i - x_{i-1} - x_{i+1}) \quad (20)$$

Se a ponta inicial está fixa, então: $m_1 \cdot \ddot{x}_1 = -T \sin \theta_0 + T \sin \theta_1$. Como $\sin \theta_0 = x_1/\ell$ e $\sin \theta_1 = (x_2 - x_1)/\ell$. Portanto, com massas iguais,

$$\ddot{x}_1 = -\frac{T}{m \cdot \ell} \cdot (2x_1 - x_2)$$

Caso contrário, $m_1 \cdot \ddot{x}_1 = T \sin \theta_1$ e portanto, com massas iguais,

$$\ddot{x}_1 = -\frac{T}{m \cdot \ell} \cdot (x_1 - x_2) \quad (21)$$

Similarmente para o último bloco. Nota-se com isso que podemos modelar esse sistema e suas variantes com as mesmas matrizes (incluindo seus autovalores e autovetores) dos sistemas massa-mola das Seções 3.2, 3.3, 3.4. As simulações do Desmos para esses sistemas massa-mola equivalentes já mostram simulações para os sistemas correspondentes de corda, na opção “*Mostrar/Esconder onda transversal*”.

5 Sumário e conclusões

Nesse trabalho, desenvolvemos uma abordagem geral para o estudo de sistemas de oscilações acopladas com um número qualquer de blocos conectados. São considerados 8 tipos diferentes de conexão de blocos, abrangendo presença ou não de paredes, conexão em linha ou em círculo, e ainda a suspensão ou não de pêndulos. Os resultados gerais são descritos em detalhes e as simulações computacionais com interface gráfica para a visualização de todos os fenômenos são fornecidas. Para o caso de massas e constantes elásticas constantes, os problemas podem ser reescritos conforme uma representação do sistema por um grafo simples e suas matrizes de adjacências e laplaciana associadas. Essa pode ser uma estratégia interessante para o ensino de física para cursos de graduação com forte viés computacional, como engenharia de computação. A abordagem apresentada neste trabalho, tanto em termos de álgebra linear quanto computacional, pode ser adaptada a outros sistemas mecânicos adaptando os arquivos fornecidos no repositório.

Referências

- [1] D. Morin. *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions*. Cambridge University Press, 2007.

- [2] International physics olympiad (ipho). Disponível em: <https://www.ipho-new.org/>. Acesso em: 01 fev. 2024.
- [3] Moysés Nussenzveig. *Curso de Física Básica: Ondas, Óptica e Termodinâmica (Vol. 2)*. Editora Blucher, São Paulo, Brasil, 2014.
- [4] Paulo A. Tipler and Gene Mosca. *Física para Cientistas e Engenheiros: Mecânica, Oscilações e Ondas e Termodinâmica (Vol. 1)*. Editora Blucher, São Paulo, Brasil, 2006.
- [5] Herbert Goldstein, Charles P. Poole, and John Safko. *Classical Mechanics*. Pearson, 3 edition, 2011.
- [6] Carl E Mungan. Using desmos to understand the difference between phase and group velocity. *The Physics Teacher*, 59(1):30–33, 2021.
- [7] F. Cunha, I. Guilhon, S. Madeiro, A. J. Sampaio, and R. Sampaio. Simulações de modos normais de oscilações acopladas no Desmos. Disponível em: https://github.com/rudinims/normal_modes.
- [8] Gene H. Golub and Charles F. Van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, USA, 2013.
- [9] Lloyd N. Trefethen and David Bau III. *Numerical Linear Algebra*. SIAM, Philadelphia, PA, USA, 1997.
- [10] Hector N Salas. Gershgorin’s theorem for matrices of operators. *Linear algebra and its applications*, 291(1-3):15–36, 1999.
- [11] Andries E. Brouwer and Willem H. Haemers. *Spectra of Graphs*. Springer, 2012.
- [12] Carlos Hoppen, David P. Jacobs, and Vilmar Trevisan. *Locating Eigenvalues in Graphs*. Springer, 2022.
- [13] Dan MacIsaac. Desmos: A free cross-platform calculating and graphing tool. *The Physics Teacher*, 54(8):509–509, 2016.