Universidade Federal do Ceará
Centro de Ciências
Departamento de Computação

Algoritmos Probabilísticos

Lista de exercícios 1

1. Elabore um algoritmo probabilístico $\Theta(n)$ que receba um inteiro k, um real $0 < \varepsilon < 1$ e um vetor A com n números reais e responda se A possui ou não um elemento majoritário (ou seja, um elemento que aparece mais do que n/k vezes). O seu algoritmo pode errar com probabilidade ε.

2. O algoritmo Bubble-Sort de ordenação troca repetidamente pares vizinhos de elementos que estejam invertidos, até que o vetor inteiro esteja ordenado. Suponha que você recebeu uma permutação aleatória de tamanho n como entrada, gerada uniformemente entre as possíveis $n!$ permutações de tamanho n. Determine o número esperado de inversões que precisam ser corigidas pelo Bubble-Sort.

3. Calcule agora a variância do número de inversões que precisam ser corrigidas pelo Bubble-Sort.

4. Seja A um algoritmo que roda em tempo esperado $O(n^2)$ para entradas aleatórias e uniformes de tamanho n. O que a desigualdade de Markov pode nos dizer sobre as entradas de pior caso desse algoritmo?

5. Determine explicitamente (ou seja, mostre o número) a probabilidade de se obter 55 ou mais coroas ao lançar 100 vezes uma moeda. Compare este valor com o limite de Chernoff. Faça o mesmo para 550 coroas em 1000 lançamentos.

6. Seja A um algoritmo probabilístico que, com entrada x, retorna uma resposta $A(x)$ que é correta com probabilidade $p > 2/3$, onde $A(x)$ é um número natural. Calcule a probabilidade da resposta majoritária (aquela que repete mais) ser a correta quando o algoritmo é repetido n vezes. Quanto deve ser o valor n de repetições para termos uma probabilidade $99,9\%$ de termos a resposta certa?

7. Dada uma permutação σ de tamanho n, dizemos que uma permutação τ de tamanho $m < n$ é subpermutação de σ se existem m elementos de σ cuja ordem relativa seja τ. Por exemplo, $\tau = (2, 1, 3)$ é subpermutação de $\sigma = (1, 4, 3, 2, 5)$. Seja $\Lambda(\tau, \sigma)$ o número de ocorrências de τ como subpermutação de σ. No exemplo anterior, $\Lambda(\tau, \sigma) = 3$, por causa de $[4, 3, 5]$, $[4, 2, 5]$ e $[3, 2, 5]$, que tem a mesma ordem relativa de $\tau = (2, 1, 3)$. Seja $t(\tau, \sigma)$ a densidade $\Lambda(\tau, \sigma)/\binom{n}{m}$. Gerando uma permutação σ aleatória e uniformemente, quanto é o valor esperado de $t(\tau, \sigma)$, onde τ é uma permutação de tamanho m?

8. Use o método das diferenças limitadas para provar que $t(\tau, \sigma)$ está bem concentrado próximo a média.

9. Seja G um grafo bipartido completo com partes A e B de tamanhos m e n respectivamente. Uma orientação D de G é um grafo direcionado obtido de G escolhendo uma direção $A \to B$ ou $A \leftarrow B$ para cada aresta de G. Uma coloração de D significa dar uma cor a cada vértice de D de modo que vértices vizinhos tenham cores diferentes e, entre duas cores, a direção das arestas é em um único sentido (ou seja, não existem vértices x e y com a mesma cor tal que $x \to z \to y$ para algum outro vértice z de G). Prove que, se

$$\binom{m}{2}2^{-n} + \binom{n}{2}2^{-m} < 1,$$

então existe uma orientação D de G tal que todos os vértices devem ter cores diferentes entre si.