Universidade Federal do Ceará
Centro de Ciências
Departamento de Computação

Algoritmos Probabilísticos
Lista de exercícios 2

1. Suponha que uma moeda não viciada é lançada N vezes. Um *grupo* é uma sequência de lançamentos consecutivos com mesmo valor. Por exemplo, se os lançamentos foram CCCKCCCKKKKKC, temos os seguintes 5 grupos: CCC, K, CCC, KKKKK, C. Qual o número esperado de grupos? Qual o número esperado de grupos de tamanho 1?

2. Sabendo que $E[(X-1)^2] = a > 0$ e que $E[(X-2)^2] = b > 0$, calcule esperança e variância de X em função de a e b.

3. O número X de partículas radioativas emitidas por um reator segue uma distribuição de Poisson com taxa λ. Cada partícula pode ser do tipo α ou do tipo β. A probabilidade de uma partícula ser do tipo α é p. Denote por Y o número de partículas do tipo α e por Z o número de partículas do tipo β, de modo que $X = Y + Z$.

(a) Encontre a distribuição de Y e de Z.

(b) Mostre que Y e Z são independentes.

Dica 1:

$$X \sim Poisson(\lambda) \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}.$$

Dica 2: Fórmula de Taylor:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

4. Seja $\{X_n,\ n \geq 0\}$ uma cadeia de Markov com estados $1, 2, 3$ dado pela matriz P abaixo, onde $P_{i,j}$ (linha i e coluna j) é a probabilidade de ir do estado i para o estado j. Seja $X'_n = \min\{X_n, 2\}$ e seja $X''_n = \max\{X_n, 2\}$. A sequência $\{X'_n,\ n \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov? A sequência $\{X''_n,\ n \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov? Justifique.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Considere a seguinte matriz P e responda:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2/5 & 1/2 & 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 4/5 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Seja E_i o evento de, iniciando no estado i, a cadeia de Markov retornar ao estado i em algum momento futuro. Quem é mais provável? E_2 ou E_5? E_2 ou E_3?

(b) Iniciando no estado 6, qual o número esperado de vezes que o processo entrará nesse estado?

6. Uma partícula se movimenta entre $n+1$ estados que estão situados em um círculo. A cada passo, a partícula se move no sentido horário com probabilidade p ou no sentido anti-horário com probabilidade $1-p$. Iniciando em um estado qualquer, calcule a probabilidade de, antes do primeiro retorno àquele estado, a partícula ter visitado todos os outros estados.

7. Um homem possui n guarda-chuvas que ele usa para ir da casa ppara o trabalho e vice-versa. Se chove no início do dia, ele leva um guarda-chuva da casa para o trabalho (se em casa tiver um). Se chover no fim do dia, ele leva um guarda-chuva do trablho para casa (se no trabalho tiver um). Considerando que a probabilidade de chover é p (seja de manhã ou de noite), qual a probabilidade dele se molhar? Ou seja, qual a fração das viagens ele estará sem guarda-chuva?

8. Seja (X_n) uma cadeia de Markov tal que, se $X_{n-1} = k$, então $\mathbb{P}(X_n = k+1) = 1/2$ e $\mathbb{P}(X_n = k-1) = 1/2$. Considere que $X_0 = 0$. Sejam $a > b > 0 > c$ inteiros. Note que, se n é ímpar e b é par, ou vice-versa, então $\mathbb{P}(X_n = b) = 0$. Considere então que n e b são ambos pares ou ambos ímpares. Calcule a probabilidade $\mathbb{P}(X_n = b)$ de X_n ser igual a b. Dizemos que a cadeia tocou o eixo $y = a$ antes de n se $X_{n'}$ é maior ou igual a a para algum $0 < n' \leq n$. Calcule a probabilidade de $X_n = b$ e a cadeia tocar o eixo $y = a$ antes de n. Calcule a probabilidade de $X_n = b$ e a cadeia tocar o eixo $y = a$ e, após o primeiro toque no eixo $y = a$, não tocar o eixo $y = c$ (a cadeia pode tocar o eixo $y = c$ antes do primeiro toque no eixo $y = a$). **Dica:** Reflexão.

9. Seja $\{X_n,\ n \geq 0\}$ uma cadeia de Markov com estados $1, 2, 3, 4, 5, 6$ dada pela matriz P abaixo, onde $P_{i,j}$ (linha i e coluna j) é a probabilidade de ir do estado i para o estado j. Seja $X'_n = \min\{X_n, 4\}$ e seja $X''_n = \max\{X_n, 3\}$. A sequência $\{X'_n,\ n \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov? A sequência $\{X''_n,\ n \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov? Justifique.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2/5 & 1/2 & 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 4/5 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \end{bmatrix}$$

10. Sobre a cadeia da questão anterior, responda:

(a) Seja E_i o evento de, iniciando no estado i, a cadeia de Markov retornar ao estado i em algum momento futuro. Quem é mais provável? E_2 ou E_5? E_2 ou E_3?

(b) Iniciando no estado 6, qual o número esperado de vezes que o processo entrará nesse estado?